

Beregning af en fisks position med hydrofoner

Udarbejdet af forfatterne til artiklen: Rejsen mod havet: Et stenrev som første stop i Aktuel Naturvidenskab nr. 6-2025.

I denne opgave skal du bruge data til at beregne fisks position ved hjælp af et koordinatsystem. Vi forenkler den virkelige proces, som kaldes **akustisk telemetri**, ved at bruge princippet om triangulering.

Baggrund

For at overvåge smolt tæt på det nye smolt-rev ved Storå-udmundingen har forskere indopereret en lille transmitter i udvalgte fisk. Denne udsender periodisk et unikt lydsignal. Rundt om smolt-revet er der placeret over 30 undervandsmikrofoner, kaldet hydrofoner, som lytter efter disse signaler.

Lyd bevæger sig med en hastighed på cirka 1500 meter i sekundet i vand. Når en fisk sender et signal, opfanges det af de nærmeste hydrofoner. Ved at sammenligne det præcise tidspunkt, hvor signalet kommer til hver hydrofon, kan vi beregne fiskens afstand til hver af dem og dermed finde dens position.

Opgave: Fiskens placering i koordinatsystemet

Forestil dig, at vi har placeret tre hydrofoner i et koordinatsystem. Deres positioner er:

- **Hydrofon A:** (0, 0)
- **Hydrofon B:** (200, 0)
- **Hydrofon C:** (100, 150)

Hydrofonerne opfanger signalet fra transmitteren i fisken på følgende tidspunkter (angivet i sekunder, efter at signalet er opfanget af den første hydrofon):

- **Hydrofon A:** 0.000 s
- **Hydrofon B:** 0.027 s
- **Hydrofon C:** 0.016 s

Hint: Lydens hastighed i vand er ca. 1500 m/s. Forskellen i ankomsttid kan bruges til at finde forskellen i afstand. Hvis du fx ved, at en hydrofon modtog signalet 0.016 s senere, har signalet tilbagelagt $0.016 \text{ s} \times 1500 \text{ m/s} = 24 \text{ m}$ længere end til den første hydrofon.

Spørgsmål:

1. Hvilken hydrofon er tættest på fisken? Begrund dit svar.
2. Brug lydens hastighed til at beregne, hvor langt signalet har rejst til hver af de to andre hydrofoner, i forhold til Hydrofon A.
3. Opstil ligninger, der beskriver fiskens mulige position (x, y) i forhold til hver hydrofon. For at gøre dette, kan du bruge afstandsformlen for en cirkel, hvor r er radius:
 - $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
 - Her er (x_0, y_0) koordinaterne for en hydrofon, og r er afstanden fra hydrofonen til fisken.
4. Ved at løse ligningssystemet for to af cirklerne, kan du finde fiskens position. Brug Hydrofon A og B til at finde fiskens x-koordinat, og derefter Hydrofon A og C for at finde y-koordinaten.

Hint: Brug andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ til at finde d_A samt løsningsformlen:

$$d_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Illustrér ved hjælp af GeoGebra fiskens position i et koordinatsystem (Indsæt værdien for d_A i dine opstillede ligninger fra spørgsmål 3 og skriv ligningerne ind i GeoGebra, husk at definere punkterne A, B og C).
6. Lydens hastighed i vand er ikke konstant, hvilke variationer tror du man skal tage højde for i virkeligheden?

Facit og løsning

1. Svar: Hydrofon A er tættest på fisken, fordi den opfanger signalet først.

2. Beregning af afstandsforskel:

- Afstandsforskel B i forhold til A:

$$0.027 \text{ s} \times 1500 \text{ m/s} = 40.5 \text{ m}$$

- Afstandsforskel C i forhold til A:

$$0.016 \text{ s} \times 1500 \text{ m/s} = 24 \text{ m}$$

3. Ligninger for cirklerne:

Lad d_A være afstanden fra fisken til Hydrofon A, d_B afstanden til Hydrofon B, og d_C afstanden til Hydrofon C.

Vi ved, at $d_B = d_A + 40.5 \text{ m}$ og $d_C = d_A + 24 \text{ m}$.

- Hydrofon A (0, 0):

$$x^2 + y^2 = d_A^2$$

- Hydrofon B (200, 0):

$$(x - 200)^2 + y^2 = (d_A + 40.5)^2$$

- Hydrofon C (100, 150):

$$(x - 100)^2 + (y - 150)^2 = (d_A + 24)^2$$

4. Løsning af ligningssystemet:

Trin 1: Find x-koordinat (brug A og B)

$$x^2 + y^2 = d_A^2$$

$$(x - 200)^2 + y^2 = (d_A + 40.5)^2$$

Kvadratsætningen: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ og $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$x^2 - 400x + 40000 + y^2 = d_A^2 + 81d_A + 1640.25$$

Erstat nu: $x^2 + y^2$ med d_A^2

$$d_A^2 - 400x + 40000 = d_A^2 + 81d_A + 1640.25$$

Nu udligner d_A^2 hinanden da de er på begge sider af lighedstegnet og ligningen forkortes:

$$-400x + 40000 = 81d_A + 1640.25$$

Der isoleres for x:

$$x = 95.899 - 0.2025d_A$$

Trin 2: Find y-koordinat (brug A og C)

$$x^2 + y^2 = d_A^2$$

$$(x - 100)^2 + (y - 150)^2 = (d_A + 24)^2$$

$$(x^2 - 200x + 10000) + (y^2 - 300y + 22500) = d_A^2 + 48d_A + 576$$

Erstat nu $x^2 + y^2$ med d_A^2

$$d_A^2 - 200x - 300y + 32500 = d_A^2 + 48d_A + 576$$

Nu udligner d_A^2 hinanden da de er på begge sider af lighedstegnet og ligningen forkortes:

$$-200x - 300y + 32500 = 48d_A + 576$$

Substituer x fra Trin 1:

$$-200(-0.2025d_A + 95.899) - 300y + 32500 = 48d_A + 576$$

Der ganges ind i parentesen:

$$40.4d_A - 19179.8 - 300y + 32500 = 48d_A + 576$$

Der isoleres for y:

$$y = 42.48 - 0.025d_A$$

Trin 3: Find d_A og (x, y)

Da du ved, at alle punkter ligger på den samme cirkel (nemlig fiskens position), kan du indsætte de fundne udtryk for x og y i den første ligning: $x^2 + y^2 = d_A^2$

$$(-0.2025d_A + 95.899)^2 + (-0.025d_A + 42.48)^2 = d_A$$

Nu udvides parenteserne igen ved hjælp af kvadratsætningen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(0.041d_A^2 - 38.84d_A + 9200) + (0.000625d_A^2 - 2.124d_A + 1804.5) = d_A^2$$

Parenteserne ophæves og leddene lægges sammen:

$$0.041625d_A^2 - 40.964d_A + 11004.5 = d_A^2$$

d_A^2 trækkes fra på begge sider af lighedstegnet:

$$-0.958d_A^2 - 40.964d_A + 11004.5 = 0$$

Brug nu andengradsligningen: $(ax^2 + bx + c = 0)$ til at finde d_A samt løsningsformlen:

$$d_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $d_A = \frac{-40.964 \pm \sqrt{40.964^2 - 4 * 0.958 * (-11004.5)}}{2 * 0.958}$
- $d_A = \frac{-40.964 \pm \sqrt{1678 + 42168.9}}{1.916}$
- $d_A = \frac{-40.964 \pm \sqrt{43846.9}}{1.916}$
- $d_A = \frac{-40.964 \pm 209.4}{1.916}$

Værdien for d_A skal være positiv, så den positive løsning vælges.

- $d_A = \frac{-40.964 + 209.4}{1.916} = \frac{168.436}{1.916} = 87.9m$

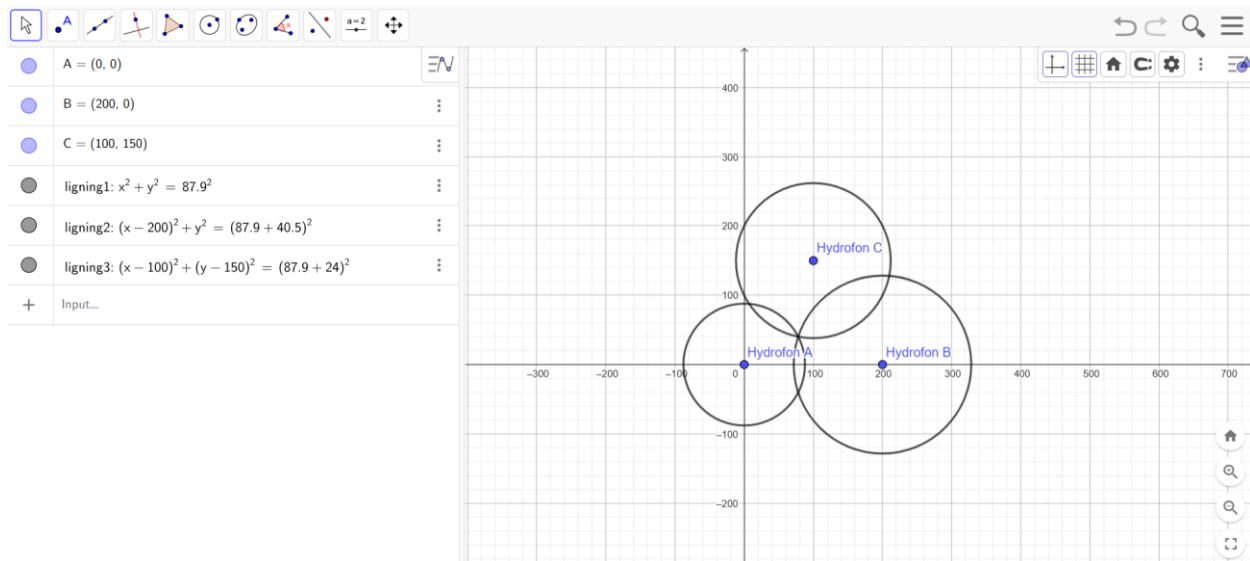
Nu kan vi finde x og y:

- $x = 95.899 - 0.2025 * (87.9)$
- $x = 78 m$

- $y = 42.48 - 0.025 * (87.9)$
- $y = 40.3m$

Fiskens position er cirka (78, 40).

5. Ligningsystemet i GeoGebra:



6. Lydens Hastighed Påvirkes af?: Temperatur, Salinitet og Tryk.