Eksotiske strukturer i syv dimensioner

- gav Abelpris til Milnor på seks millioner

Abelprisen gik i 2011 til den amerikanske matematiker John Willard Milnor »for banebrydende opdagelser inden for topologi, geometri og algebra.« Vi ser her nærmere på prisvinderens arbejde.

Af Vagn Lundsgaard Hansen og Poul G. Hjorth

■ Det kom som en stor overraskelse for den matematiske verden, og også for ham selv, da John Milnor i 1956 opdagede, at der er mere end én differentiabel struktur på den 7-dimensionale sfære. Bare at beskrive det underliggende geometriske objekt er vanskeligt. Kort fortalt kan man fra hvert punkt i den 7-dimensionale sfære bevæge sig ud i objektet i syv uafhængige retninger helt i analogi med, at man fra hvert punkt på en kugleflade (sfære) i det sædvanlige fysiske rum kan bevæge sig ud på fladen i to uafhængige retninger. Opdagelsen af *eksotiske* differentiable strukturer på den 7-dimensionale sfære er uden tvivl Milnors mest banebrydende opdagelse, og dermed en væsentlig grund til, at han nu er blevet hædret med Abelpri-

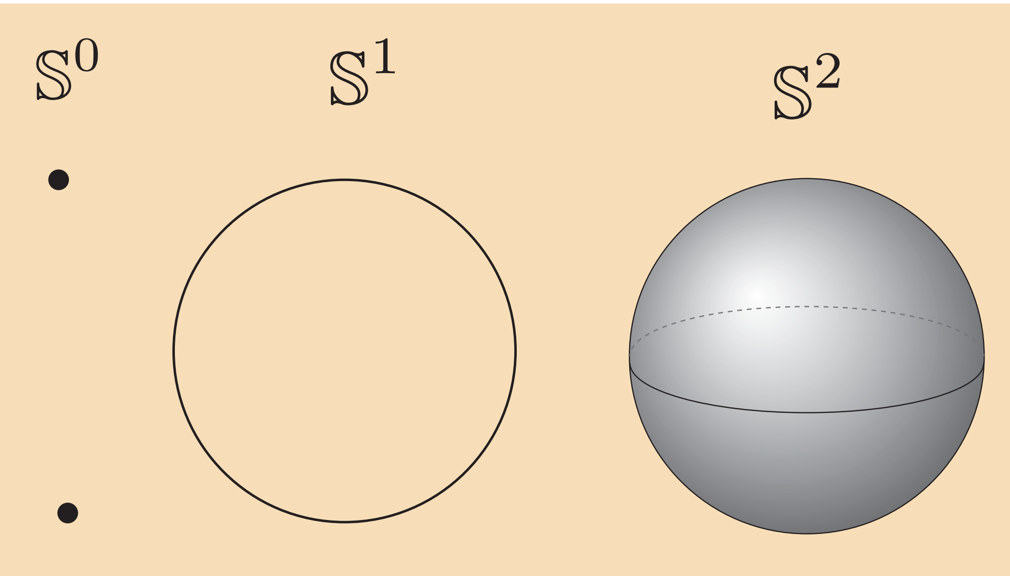

Illustration af tre forskellige dimensioner: $\mathbf{S}^2$, den 2-dimensionale sfære i det 3-dimensionale rum. $\mathbf{S}^1$, den 1-dimensionale sfære – eller enhedscirklen. $\mathbf{S}^0$ er, som den eneste i den store familie af sfærer, adskilt i to stykker, to punkter. Bemærk, hvorledes sfærerne ligger inde i hinanden; $\mathbf{S}^0$ er to antipodiske punkter på $\mathbf{S}^1$, som igen er ækvator i $\mathbf{S}^2$.

sen. Vi vil i det følgende kigge nærmere på dette dybtliggende resultat.

Sfærer op til 3 dimensioner

Når vi bruger ordet "kugleflade" tænker de fleste på netop dette: overfladen af en kugle. Det kan være en billardkugle, eller måske en fodbold. Vores jordklode er omtrentlig kugleformet, og fra dette eksempel stammer mange af betegnelserne for de abstrakte termer. Lokalt synes kuglefladen at være flad, dvs. at have 2 dimensioner, ligesom et stykke papir, eller et landkort. Matematikerne kalder denne flade $\mathbf{S}^2$, den 2-dimensionale sfære i det 3-dimensionale rum. Men der er jo andre dimensioner end 3.

Går vi først nedad i dimension, så er $\mathbf{S}^1$, den 1-dimensionale sfære, kendt og elsket som enhedscirklen (se figur 1). Den er lokalt en linje, altså lokalt 1-dimensional, men krummer rundt og lukker sig, så den aldrig har nogen begyndelse eller ophør. Cirklen er derfor i mange sammenhænge brugt som symbol på noget endeløst og uophørligt. Alligevel er den, som alle sfærer, af endeligt omfang. Cirklens samlede omkreds er tallet π gange cirklens diameter. Der findes en endnu lavere dimensional sfære, nemlig dimension 0; den 0-dimensionale sfære $\mathbf{S}^0$ er, som den eneste i den store familie af sfærer, adskilt i to stykker, to punkter. Vi ser, hvorledes sfærerne ligger inde i hinanden; $\mathbf{S}^0$ er to antipodiske punkter på $\mathbf{S}^1$, som igen er ækvator i $\mathbf{S}^2$.

Hvad med højere dimensioner?

Her må vi slippe de simple billeder og illustrationer. Vi fornemmer jo at befinde os i et 3-dimensionelt rum (muligvis med "små" ekstra dimensioner, hvis strengteoretikernes teorier har noget på sig, men i hvert fald 3 store tydelige dimensioner: længde, bredde og højde). Et punkt i det sædvanlige 3-dimensionale rum kan derfor fastlægges ved tre koordinater (længde, bredde, højde), som ordnes i et talsæt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, kaldet en 3-dimensional vektor. Vi kan beregne afstande mellem punkter i rummet ud fra deres koordinater ved at udnytte Den Pythagoræiske Læresætning om længderne af siderne i en retvinklet trekant. Dette afstandsbegreb i rummet kaldes for den euklidiske afstand. Den 2-dimensionale sfære S^2 kan så beskrives som mængden af punkter $\mathbf{x}$ i rummet, der har den euklidiske afstand 1 (radius i sfæren) fra koordinatsystemets origo (centrum for sfæren), altså mængden af punkter $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ hvorom det gælder, at $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Talrum

Den 2-dimensionale kugleflade er overfladen af en kugle, der ligger inde i det 3-dimensionale rum, dvs. $\mathbf{S}^2$ har brug for et 3-dimensionalt rum at krumme sig i, på samme måde som $\mathbf{S}^1$ har brug for en plan, og $\mathbf{S}^0$ har brug for en linje at være indlejret i. Det betyder imidlertid, at $\mathbf{S}^3$ er en delmængde af et 4-dimensionalt rum, dvs. et rum med 4 retninger. Og et sådant rum er meget svært at forestille sig og endnu sværere at illustrere. Vi må derfor stole på, at vi et langt stykke hen af vejen kan gøre de samme ting i dimensioner højere end tre som vi kan gøre i det sædvanlige 3-dimensionale rum. Og det kan vi ved at holde os til koordinatbeskrivelser.

Vi indfører hertil de såkaldte talrum $\mathbf{R}^n$**,** som giver mening i alle dimensioner. Det 4-dimensionale talrum $\mathbf{R}^4$ indeholder således alle 4-dimensionale vektorer $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. En populær måde at forestille sig de fire dimensioner på er at tænke på de tre første koordinater som de sædvanlige rumlige koordinater og den fjerde koordinat som tiden. Ved at føje flere koordinater til får man først det 5-dimensionale talrum $\mathbf{R}^5$, derefter det 6-dimensionale talrum $\mathbf{R}^6$, etc. I alle talrummene har man et afstandsbegreb svarende til den euklidiske afstand i tre dimensioner beregnet ved en generaliseret brug af Pythagoras' formel.

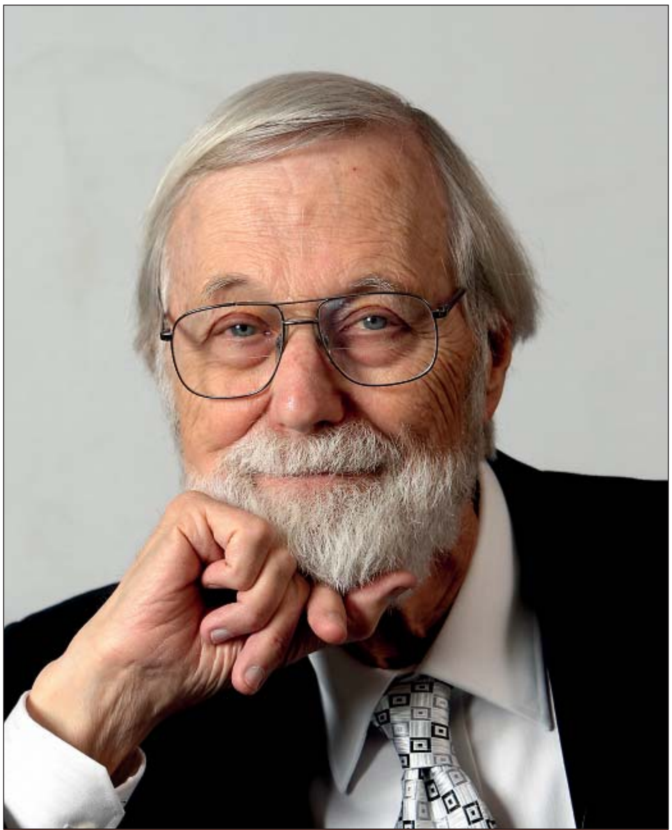

Foto: Knut Falch

En Princeton Mand

John Willard Milnor blev født den 20. februar 1931 i Orange, New Jersey i USA.

John Milnor har gennemført hele sin universitetsuddannelse ved Princeton University. Efter bachelorgraden i 1951 begyndte han straks med forskning hvor han udviste et så enestående talent at han i 1953 helt usædvanligt blev ansat ved Princeton University endnu før han var færdig med sine doktorgradsstudier. Han erhvervede doktorgraden i 1954 med den kendte topolog Ralph Fox som vejleder.

Med finansiering fra Alfred P. Sloan Foundation kunne Milnor i perioden 1955-59 fortsætte sin forskning ved Princeton University. Her blev han udnævnt til professor i 1960, og da han i 1962 modtog Fields-medaljen i matematik fik han det prestigefyldte Henry Putman professorat. Milnor var ansat ved Princeton University frem til 1967. Efter kortere perioder ved University of California, Los Angeles, og Massachusetts Institute of Technology, vendte han i 1970 tilbage til Princeton som permanent medlem af byens berømte Institute for Advanced Study.

I 1989 blev Milnor ansat som den første leder af Institute for Mathematical Sciences ved Stony Brook University i New York. Her er Milnor fortsat en af universitetets mest prominente professorer og han er stadig medlem af ledelsen ved Institute for Mathematical Sciences. John Milnor har spillet en vigtig rolle i American Mathematical Society, hvor han var vicepræsident i perioden 1975-76. I mange år var han redaktør for det højt ansete tidsskrift *Annals of Mathematics.*

Vi kan nu fastlægge den 3-dimensionale sfære $\mathbf{S}^3$ som den delmængde af det 4-dimensionale talrum $\mathbf{R}^4$, som består af alle 4-dimensionale vektorer $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ hvorom det gælder, at $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

Tilsvarende er den 4-dimensionale sfære $\mathbf{S}^4$ en delmængde af det 5-dimensionale talrum $\mathbf{R}^5$, og helt generelt er den (n-1)-di-

Foto: Kyrre Lien/Scanpix

Norges Kong Harald og statsråd Tora Aasland på vej til Abelbanketten på Akershus slot sammen med prisvinderen John Milnor og hans kone Dusa McDuff.

mensionale sfære $\mathbf{S}^{n-1}$ en delmængde af det n-dimensionale talrum $\mathbf{R}^n$ for alle dimensioner n = 1, 2, 3, ···

Differentiable strukturer

Lokalt kan en kugleflade som $\mathbf{S}^2$ beskrives som om den var en del af en 2-dimensional plan. Det er det, vi gør med et landkort; kortet beskriver et lille afgrænset stykke af kuglefladen. Intet fladt landkort kunne være en tro gengivelse af kuglefladen, alene af den grund, at man på kuglefladen kan gå i den samme retning hele tiden og på et tidspunkt komme rundt og tilbage, hvor man startede. Det kan man ikke på et stykke papir uden at skifte retning. Alle, der har prøvet at lægge en appelsinskræl ud på et fladt bord, ved, at appelsinskrællen går i stykker. Kun ved at sammenstykke hele fladen af et antal "lapper" eller lokale kort, kan man kortlægge hele fladen.

Men kortene skal også passe sammen, således at man kan starte på det ene kort, gå hen over en fælles zone, og fortsætte på det andet kort, uden at der kommer spring eller knæk i ens position. Det kalder matematikerne, at der er et "glat", eller differentiabelt, overlap mellem kortene på fladen. Den totale samling af alle mulige kort, der indbyrdes overlapper glat, kaldes en *differentiabel struktur*.

Tilsvarende begreber kan indføres for sfærer i vilkårlig dimension og mere generelt for geometriske objekter, som på små stykker kan beskrives ved et af talrummene, kaldet *mangfoldigheder*.

Kan der være mere end én væsensforskellig differentiabel struktur på en kugleflade? Det ville man ikke tro umiddelbart, og det gælder da også i de umiddelbart anskuelige dimensioner n = 1 og 2 at der kun er en differentiabel struktur på $\mathbf{S}^n$. Det samme er også tilfældet for n = 3, 5 og 6, men her er det langt fra trivielt at bevise.

Det forudsætter indledningsvist, at man kender svaret til den såkaldte generaliserede *Poincarés formodning* som topologisk karakteriserer $\mathbf{S}^n$. I dimension større end 5 blev denne formodning bevist af den amerikanske matematiker Steven Smale i banebrydende arbejder om mangfoldigheder omkring 1960 (som også fortjener en Abelpris!).

I dimension 4 blev Poincarés formodning bevist i 1983 af den amerikanske matematiker Michael Freedman, og i dimension 3 af den russiske matematiker Grigori Perelmann i 2002. Der skal imidlertid mere til og dette er ikke kendt i dimension 4. Antallet af differentiable strukturer på $\mathbf{S}^4$ er derfor den dag i dag et uløst problem. Milnor kendte naturligvis Smales arbejde, da han i 1956 opdagede noget totalt overraskende. Den 7-dimensionale sfære tillader mere end én differentiabel struktur!

Eksotisk klippe-klistre med kugler

En sfære i et talrum er randen på den *kugle* den omslutter. I talrummet $\mathbf{R}^n$ er sfæren $\mathbf{S}^{n-1}$ således rand på den *n*-dimensionale *enhedskugle* $\mathbf{D}^n$ for alle $n \geq 1$. I små dimensioner kender vi $\mathbf{D}^2$ og $\mathbf{D}^3$ som henholdsvis en cirkelskive og en sædvanlig 3-dimensional kugle med diameter 2, mens $\mathbf{D}^1$ blot er et linjestykke af længde 2.

Nu sker der ting og sager. Hvis vi klipper kuglefladen $\mathbf{S}^2$ op langs ækvatorcirklen $\mathbf{S}^1$ får vi to kuglekalotter, der kan opfattes som to rundbuede eksemplarer af $\mathbf{D}^2$ med enhedscirklen $\mathbf{S}^1$ som rand, Det betyder så omvendt, at hvis vi limer to eksemplarer af $\mathbf{D}^2$ sammen langs den fælles rand $\mathbf{S}^1$ får vi kuglefladen $\mathbf{S}^2$ tilbage i fin form. Hvis man før man limer sammen finder på at flytte rundt på punkterne i randen af det ene af de to eksemplarer af $\mathbf{D}^2$ ved en såkaldt *diffeomorfi* af enhedscirklen, får man igen et 2-dimensionalt geometrisk objekt. Og til vores forbløffelse er dette geometriske objekt også en flade ækvivalent med $\mathbf{S}^2$. Dette er ikke helt trivielt at vise, men det er sandt.

I en vilkårlig dimension $n = 1, 2, 3, \cdots$ kan man foretage tilsvarende ting med den n-dimensionale enhedskugle $\mathbf{D}^n$. Her kan man lime to eksemplarer af $\mathbf{D}^n$ sammen langs den fælles rand $\mathbf{S}^{n-1}$ langs en diffeomorfi af $\mathbf{S}^{n-1}$. Og igen får man et geometrisk objekt, som er topologisk ækvivalent med den n-dimensionale sfære $\mathbf{S}^n$. Disse nye "sfærer" kendes under navnet *homotopisfærer*.

Eksotiske differentiable strukturer på sfærer

Det var i forbindelse med konstruktioner af homotopisfærer, at Milnor i 1956 opdagede, at man på flere måder kunne lægge en differentiabel struktur på den 7-dimensionale sfære. Til sin egen store forbløffelse havde Milnor under forsøget på at vise, at en given homotopisfære var en sædvanlig glat 7-dimensional sfære, i stedet opdaget den første *eksotiske* differentiable struktur.

Milnors opdagelse i 1956 af eksotiske glatte sfærer af syv dimensioner var fuldstændig uventet.

Med et sæt havde denne opdagelse føjet en ny spændende gren til de geometriske discipliner: *differentialtopologi*. Nogle af de mest fremragende matematikere fra slutningen af 1900-tallet har arbejdet med at forstå og udforske geometriske objekters differentialtopologiske egenskaber og området er stadigt aktivt. Sammen med den franske matematiker Michel Kervaire arbejdede Milnor selv videre med sin opdagelse og gav en fuldstændig liste over alle forskellige differentiable strukturer på sfærer også i mange andre dimensioner. Specielt viste de, at den 7-dimensionale sfære har nøjagtig 28 forskellige differentiable strukturer, og at den 11-dimensionale sfære har 992 forskellige differentiable strukturer.

ABEL
PRISEN

Det Kgl. Norske Videnskabernes Selskab uddeler hvert år en pris i Nobelprisklassen, som hædrer en fremtrædende matematiker. Prisen er opkaldt efter den store norske matematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) og er på 6 millioner norske kroner. Abelprisen blev uddelt første gang i 2003 og den første prismodtager var den franske matematiker Jean-Pierre Serre (f. 1926). Igen i 2011 er det lykkedes for priskomiteen at finde en prismodtager af allerhøjeste karat. Valget af John Willard Milnor som årets prismodtager cementerer yderligere Abelprisen som den måske mest eftertragtede pris i matematik.

En værdig Abelprismodtager

John Milnor er en af de absolut største matematikere i vores tid. Hans arbejder er skelsættende, og har stimuleret og inspireret flere generationer af unge matematikere.

Hans store bidrag falder mest inden for topologi, der er den gren af geometrien, som ser på de kvalitative egenskaber ved geometriske objekter, men han har også givet betydelige bidrag til differentialgeometri, algebra og dynamiske systemer.

På hvert eneste af de områder af matematikken, som John Milnor har beskæftiget sig med, har hans indsigt og angrebsvinkler haft helt afgørende betydning for senere udviklinger.

Hans berømte monografi om isolerede singulariteter på hyperflader betragtes eksempelvis som det enkeltstående mest indflydelsesrige arbejde inden for singularitetsteori, hvor han har lagt navn til begreberne Milnor-tal og Milnor-fibre.

I de seneste årtier har John Milnor viet en stor del af sin opmærksomhed til studiet af dynamiske systemer i lave dimensioner. Hans undersøgelser i dette område har på en dybtgående måde dannet bro mellem reel og kompleks dynamik, som har ført til mange interessante fremskridt.

I tilknytning til sin forskning har Milnor vist sig som en fremragende og begavet formidler af avanceret matematik. Det er vanskeligt at se, at det kan gøres bedre. I en lang række aldeles fremragende monografier har Milnor tacklet dybtliggende og banebrydende emner i frontlinjen af den aktuelle matematik forskning. Milnors bøger har været en helt enestående inspirationskilde for nye forskere i matematik, og mange matematikere har slugt dem fra ende til anden. Vi er mange, der skylder ham en varm tak.

Om nogen har John Willard Milnor fortjent sin Abelpris. ■

Om forfatterne

Vagn Lundsgaard Hansen er professor
v.l.hansen@mat.dtu.dk

Poul G. Hjorth er lektor
p.g.hjorth@mat.dtu.dk

Begge ved
Institut for Matematik,
Danmarks Tekniske Universitet

Videre læsning

V. L. Hansen (1989): Den geometriske dimension – Fra iagttagelse til forskning. Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck.

M. Monastyrsky (1998): Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, USA.

www.abelprisen.no/en/prisvinnere/2011/

En lille formidlingsperle om differentialtopologi fra mesteren selv:
Milnor, John W. (1997) [1965]. Topology from the differentiable viewpoint. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Og en anden klassiker med mange beundrere:
Milnor, John W. (1963). Morse theory. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton, NJ: Princeton University Press.