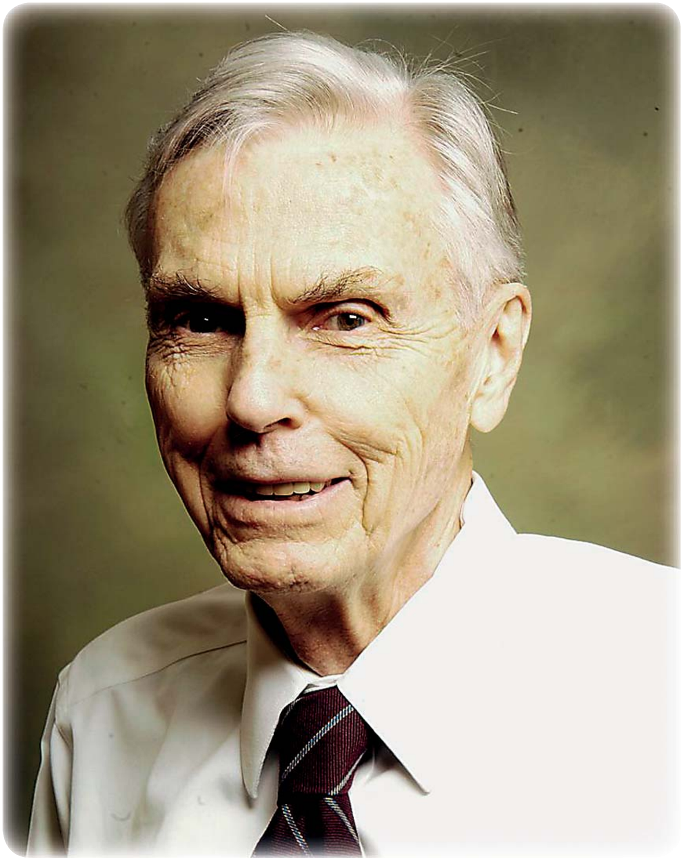
Tal og geometri på date

- giver Abelpris til Tate

Abelprisen gik i 2010 til den fremragende amerikanske matematiker John Tate for hans banebrydende arbejde i grænseområdet mellem talteori og geometri. Tate har på helt enestående vis bragt disse to klassiske discipliner i matematikken i tæt samspil.



John Torrence Tate Jr. er født den 13. marts 1925 og han er således en moden herre på 85 år. Tate fik sin doktorgrad fra universitetet i Princeton i 1950 med den navnkundige østrigsk fødte matematiker Emil Artin (1898-1962) som vejleder. I perioden 1954-1990 var Tate professor ved Harvard Universitet. I 1990 flyttede han til University of Texas i Austin, hvor han stadig er yderst aktiv.

Af Vagn Lundsgaard Hansen
og Poul G. Hjorth

■ Det Kgl. Norske Videnskabernes Selskab uddeler hvert år en pris i Nobelprisklassen, som hædrer en fremtrædende matematiker. Prisen er opkaldt efter den store norske matematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) og den blev uddelt første gang i 2003. Den første modtager af Abelprisen var den franske matematiker Jean-Pierre Serre (f. 1926), og niveauet for prismodtagere var dermed fra starten sat overordentlig højt. Det er lykkedes for priskomiteen år efter år at finde en prismodtager af allerhøjeste karat, således at Abelprisen selv med sine få år på bagen allerede nu fremstår som den måske mest eftertragtede pris i matematik.

En værdig modtager

Det høje niveau er på alle måder fastholdt i 2010, hvor Abelprisen tilfaldt den amerikanske matematiker John Tate. Som der står i den officielle begrundelse: »… mange af de vigtigste hovedstrømninger i *algebraisk talteori* og *aritmetisk geometri* er blevet muliggjort af John Tates afgørende og afklarende indsigter. Han har efterladt et markant aftryk på moderne matematik.«

John Tate har i over tres år været en central figur inden for områderne *algebraisk talteori* og *aritmetisk geometri*. Matematikere taler ligefrem om det såkaldte "Tate-tal", der defineres som antallet af minutter, der forløber i en forelæsning inden for disse to emner før et af Tates resultater eller formodninger nævnes; det er som regel et meget lille tal. At have været på forskningens skarpe kant så længe, og at have bidraget med så mange nye og originale begreber er en sjælden bedrift og har affødt den dybeste respekt i den matematiske verden.

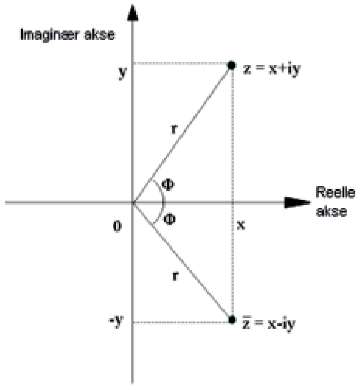
Komplekse tal

Komplekse, i betydningen sammensatte, tal, er en udvidelse af de sædvanlige tal som vi regner som punkter på en linje. Et komplekst tal er et talpar (x,y), der kan regnes som et punkt i en plan. Denne plan kaldes den komplekse talplan. I den komplekse talplan genfinder vi de sædvanlige tal som de tal, der har koordinater (x,0), dvs. førsteaksen. Denne linje kaldes derfor den reelle akse, den nye akse (0,y) for imaginæraksen, og i parret (x,y) kaldes x for realdelen, og y kaldes imaginærdelen.

Komplekse tal kan lægges til hinanden og trækkes fra hinanden komponentvis, mens multiplikationen følger den tilsyneladende ejendommelige regel at (x1,y1) · (x2,y2) = (x1 · x2-y1 · y2,x1 · y2+x2 · y1). Specielt bliver (0,1) · (0,1) = (-1,0) således at tallet (0,1), ofte betegnet blot "i", den imaginære enhed, kan siges at være kvadratroden af -1. Inden for de komplekse tal kan man derfor godt tage kvadratroden af et negativt tal.

Matematisk analyse opererer ofte med udgangspunkt i de komplekse tal, idet mange fundamentale resultater og konstruktioner, hvor paradoksalt dette end kan lyde, er enklere og mere naturlige, i den komplekse talplan.

Citat af Gottfried Leibniz: »Den Guddommelige Ånd fandt et sublimt udtryk i det analysens under, dette varsel om en fuldendt verden, dette amfibium mellem væren og ikke-væren, som vi kalder den imaginære rod af den negative enhed«



Geometri, talteori og algebra

Matematik er i sit udgangspunkt ikke naturvidenskab, men de to videnskaber har et tæt symbiotisk forhold uden skarpe afgrænsninger. Tates matematiske arbejdsområder omhandler ret langhårede matematiske emner, som udover ren matematisk interesse har mange anvendelser i nutidens naturvidenskab og teknologi. Arbejder om aritmetisk geometri af elliptiske kurver finder eksempelvis anvendelse i kryptografi, i teorien for superstrenge i fysikken, ved beskrivelsen af spin i en snurretop i mekanikken, i studiet af integrable modeller i statistisk mekanik, ved undersøgelser af spejlsymmetri i algebraisk geometri, og endog i finansieringsteori.

Geometri er læren om former og afstande i planen, i rummet, eller, om nødvendigt, i rum af højere dimension og et afstandsbegreb af mere abstrakt natur. Talteori omhandler, som navnet stærkt antyder, tallenes egenskaber. Algebra (et låneord fra arabisk) er studiet af beregningsmæssige operationer og strukturer. Aritmetik betegner mere direkte "regning" med tal i traditionel forstand, mens man i algebra kan "regne" med mange størrelser, der ikke nødvendigvis er tal. Det kan f.eks. være regning med fletninger af systemer af snore, eller med knuder på snore, hvor algebra belyser rummets egenskaber, dvs. geometri, på en ny måde.

De ovennævnte discipliner er hver for sig spændende og har alle en lang historie med tråde helt tilbage til menneskehedens tidligste æra. Når disciplinerne bringes til at spille sammen og belyse hinanden sker der ofte helt nye og overraskende ting. To af de nye matematiske felter opstået i denne ånd er *algebraisk talteori* og *aritmetisk geometri,* som udnytter henholdsvis algebraiske metoder i studiet af talsystemer og aritmetiske metoder i studiet af geometriske former.

Fra pythagoræiske talsæt til Fermats store sætning

En velkendt læresætning fra geometrien er den såkaldte *pythagoræiske læresætning.* Sætningen var sikkert kendt i det gamle Babylon allerede omkring 1800 f.Kr., altså længe før Pythagoras. I sin oprindelige form udtaler den pythagoræiske læresætning sig om en sammenhæng mellem arealerne af kvadraterne på kanterne i en retvinklet trekant. Hvis længderne af de to kanter, der danner den rette vinkel i den retvinklede trekant, betegnes med x og y, og længden af kanten over for den rette vinkel betegnes med z, så kan sammenhængen udtrykkes ved ligningen $x^2 + y^2 = z^2$. I nogle, retvinklede trekanter har de indgående kanter længder som er hele tal, altså hvor alle tallene i ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ er hele tal. Det mindste eksempel på et talsæt af hele tal, som tilfredsstiller denne ligning, er $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, som var kendt allerede i oldtidens Ægypten, hvor man brugte trekanter med disse kantlængder til at lave rette vinkler. Et talsæt (x, y, z), der tilfredsstiller ligningen kaldes et pythagoræisk talsæt. Det er ikke vanskeligt at se, at der er uendeligt mange pythagoræiske talsæt, idet ethvert multiplum af et givet *pythagoræisk talsæt* selv er et pythagoræisk talsæt. Fra (3, 4, 5) får man eksempelvis den uendelige familie af pythagoræiske talsæt (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), ···.

Når man begynder at interessere sig for egenskaber ved tallene løsrevet fra eksempelvis længderne i en trekant bevæger man sig fra geometri over i talteori. I forlængelse af spørgsmålet om eksistensen af pythagoræiske talsæt melder der sig det oplagte spørgsmål om der findes heltallige løsninger til ligninger af form $x^n + y^n = z^n$ for n > 2. I marginen til en bog om algebra skrev den franske matematiker Pierre de Fermat i 1637, at han havde bevist at der *ikke* findes sådanne talsæt af hele tal, men at der var for lidt plads i marginen til at nedskrive beviset. Udsagnet kendes nu som *Fermats store sætning.* Spørgsmålet viste sig imidlertid at være mere delikat end som sådan, og det må stærkt betvivles, at Fermat faktisk havde et bevis for sin påstand. Der skulle gå flere hundrede år før det i 1994 definitivt blev bevist af den engelske matematiker Andrew John Wiles (f. 1953), at der ikke findes sådanne talsæt af hele tal. Wiles' bevis fylder mange sider af yderst teknisk matematik, og det udnytter en lang række metoder og resultater, bl.a. udviklet af John Tate.

Om Riemanns formodning

Den såkaldte *Riemanns formodning* er en anden klassisk udfordring i matematikken, hvortil John Tate har ydet stærke bidrag frem mod en løsning. Formodningen henstår dog stadig som uløst på trods af matematikeres hårdnakkede angreb nu i mere end hundrede år.

Formodningen knytter an til spørgsmål om funktioner defineret ved summer af uendeligt mange led. At sådanne summer kunne have en endelig værdi oversteg fatteevnen hos oldtidens store græske matematikere, som havde problemer med det uendelige. I løbet af renæssancen begyndte matematikerne langsomt at få hold på, hvordan man skulle opfatte en sum af uendeligt mange størrelser, men begrebet blev dog først endelig forstået og præcist defineret i arbejder omkring 1820 af den franske matematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1863).

Med den præcise definition til rådighed er det ikke svært at bevise, at den uendelige sum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Beviset kan let anskueliggø-

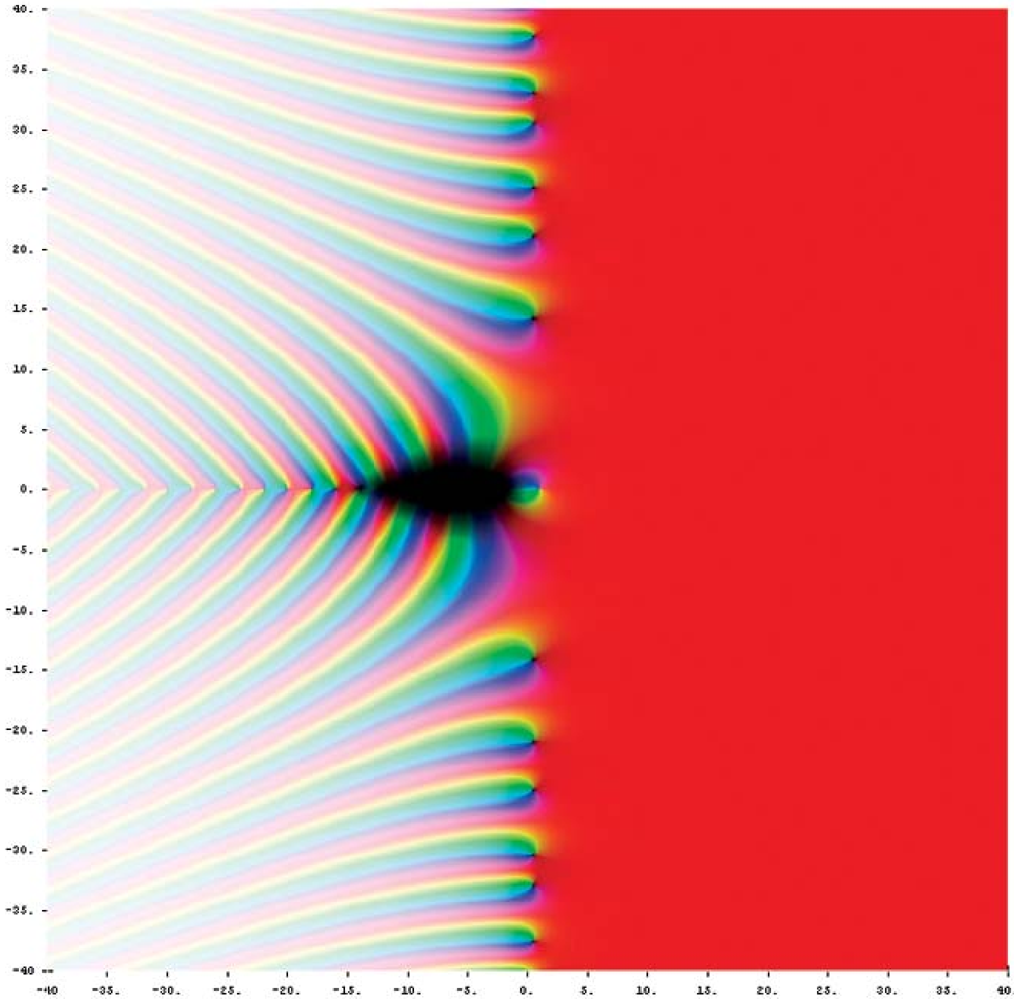


Illustration: Wikipedia

På figuren er værdierne for Riemanns zeta-funktion i den komplekse plan afbildet så farven indikerer den komplekse værdi. Jo kraftigere farver, jo mindre værdier; farverne i sig selv angiver den komplekse fase. De sorte prikker er de kendte værdier, hvor zeta-funktionen er nul; de ligger alle på linjen Re(z) = ½. værdier med positiv relaldel er angivet med rødt.

res ved successivt at halvere en meterstok og summere de uendeligt mange delstykker.

Det er heller ikke svært at bevise helt stringent, at følgende uendelige sum har en endelig værdi

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots$$

Det er lidt sværere at bevise, at summen faktisk er $\frac{\pi^2}{6}$.

Det er nærliggende at søge at generalisere dette resultat og spørge for hvilke reelle tal s følgende mere generelle uendelige sum har en endelig værdi (summen kan udføres)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\cdots$$

For sådanne reelle tal s definerer summen $\zeta(s)$ en funktion, som først blev udforsket systematisk af den store russisk-schweiziske matematiker Leonhard Euler (1707-1783) og nu kaldes *zeta-funktionen.* Umiddelbart får man ved de kendte matematiske metoder for sådanne summer kun en endelig værdi når $s > 1$, og zetafunktionen er for reelle tal derfor kun defineret for $s > 1$.

Den tyske matematiker Bernhard Riemann (1826-1866) udvidede imidlertid studiet af funktionen $\zeta(s)$ til også at omfatte *komplekse* talværdier af s. Denne såkaldte *Riemann zetafunktion* stemmer overens med den af Euler definerede zetafunktion for reelle tal s > 1, men antager endelige værdier også for s < 1. Idet man stadig noterer den udvidede komplekse funktion som en sum, får man eksempelvis for s = 0, det helt overraskende resultat, at $\zeta(0) = 1+1+1+1+\cdots = -½$.

Riemanns zeta-funktion har også nulpunkter. Riemann formodede, men var ude af stand til at bevise, at nulpunkterne alle ligger på linjen i den komplekse talplan svarende til realdel = 1/2. Afgørelsen af dette spørgsmål betragtes den dag i dag som et af de helt store ubeviste spørgsmål i matematikken, den såkaldte *Riemann-hypotese.* Mange metoder, der har fundet anvendelse andre steder, er oprindelig udviklet som en del af angrebet på Riemann-hypotesen, og også her har John Tate leveret et væld af opdagelser, algoritmer og metoder.

Om forfatterne

Vagn Lundsgaard Hansen er professor
E-mail: v.l.hansen@mat.dtu.dk

Poul G. Hjorth er lektor
E-mail: p.g.hjorth@mat.dtu.dk

Begge ved
Institut for Matematik,
Danmarks Tekniske Universitet

Videre læsning

V. L. Hansen: Fascinationen ved knuder. Aktuel Naturvidenskab, Nr. 2, 2. Årgang, 2000, 12-14.

V. L. Hansen: "Matematikkens Uendelige Univers". Den Private Ingeniørfond, 2002.

V. L. Hansen: "Rundt om uendeligheden". Danskernes Akademi, den 11. januar 2010. [http://www.dr.dk/DR2/Danskernes+akademi/Natur_Matematik/Rundt_om_uendeligheden.htm]

www.abelprisen.no

J.H. Silverman og J. Tate: Rational Points on Elliptic Curves. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin; 1992. (Corr. 2nd. Ed. 1994).

http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function