

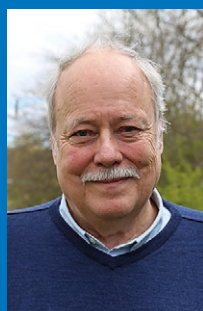


Foto: Shutterstock

MATEMATISKE MODELLER

– vejledende eller vildledende?

Nogle gange er matematiske modeller til at stole på
– andre gange fungerer de som røgslør. Det er vigtigt,
at undervisningssystemet klæder os bedre på til skelne
mellem matematiske modellers forskellighed, og
hvor forskelligt de fungerer, da verden i dag
er fuld af dem.



Forfatteren

Jens Højgaard Jensen er lektor ved IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø, Roskilde Universitet. Har siden 1972 deltaget i opbygningen af RUC, blandt andet som dekan for Det Naturvidenskabelige Hovedområde, prorektor og studieleder for Den Naturvidenskabelige Basisuddannelse. Hans faglige hovedinteresse er i de eksakte fags didaktik og videnskabsteori. E-mail: jhj@ruc.dk

Der ligger matematiske modeller til grund for GPS-systemerne. Ligeledes er klimamodeller baseret på matematisk modellering. Og det er Finansministeriets regnemodeller også. I det hele taget ligger der matematiske modeller bag både mange beslutninger og mange teknologier i samfundet, selvom det ikke er særlig tydeligt for de fleste.

Den skjulte og gennemtrængende eksistens af matematiske modeller i samfundet udgør et problem for demokratiet. Hvis man altid kunne stole på modellerne, ville det være en fordel for demokratiet, ved at modellerne leverede et oplyst grundlag for beslutninger.

Sådan er det med modellerne bag udviklingen af GPS-systemerne. Men i forhold til klimamodellerne er der mere plads til skepsis. Og skepsissen gælder i endnu højere grad i forhold til Finansministeriets regnemodeller.

Hvordan skal man da som almindelig borger forholde sig til resultaterne af matematiske modelberegninger? I almindelighed at stole på dem eller i almindelighed at være skeptisk rækker ikke. Hvordan da at skelne mellem troværdige og utroværdige modeller? At sætte sig ind i for eksempel GPS-systemernes, klimaberegningernes og økonomimodellernes omfattende, komplekse og avancerede modelberegninger er kun overkommeligt for involverede

specialister. Og de behersker hver for sig kun hjørner af modellerne. Det mere overkommelige er, at man som almindelig borger bliver hjulpet til dømmekraft om matematiske modellers forskellighed karakter igennem uddannelsessystemet. Desværre sker det ikke i dag. Og det betyder, at de matematiske modellers forskellighed for de fleste borgere er kamoufleret af, at de tilsyneladende ser meget ens ud, fordi de er formuleret i et matematisk sprog.

I denne artikel vil jeg ved hjælp af pædagogisk valgte, enkle eksempler illustrere, hvordan vurderingen af troværdigheden af matematiske modeller afhænger af de indholdsmæssige udgangspunkter bag modellernes matematiske udseender.

Matematiske modellers grundlag

Nogle matematiske modeller er *teoriafledte*. Andre matematiske modeller er mere *ad hoc* prægede. Og teorierne kan være noget, vi tror *klippefast* på, eller de kan være *hypoteser*, hvis konsekvenser vi vil undersøge. Modellerne bag udviklingen af GPS-systemerne er eksempelvis afledt af geometri, Newtons mekanik, Einsteins specielle relativitetsteori og Einsteins generelle relativitetsteori. Det er teorier, som i mange sammenhænge har vist deres praktiske anvendelighed. Så dem tror vi klippefast på indenfor deres praktiske domæner.

Finansministeriets regnemodeller er også teoriafledte. Men her er der mere tale om teori i betydningen hypotese. Så her er der grund til at spørge til, om hypotesen ikke kunne erstattes af en anden med andre konsekvenser til følge. Herudover er finansministeriets regnemodeller tilføjet mange *ad hoc* antagelser, som ikke kan diskuteres i lyset af en teori, men alene retfærdiggøres empirisk. Hvad angår klimamodellerne, så indeholder de, som finansministeriets regnemodeller, en blanding af teoriafledte matematiske delmodeller og *ad hoc* matematiske modeller. Men teorierne, de matematiske delmodeller afledes fra, er ikke i samme grad hypotetiske, som de er i tilfældet Finansministeriets regnemodeller.

Med teoriafledte matematiske modeller mener jeg modeller, der er sammenvævede med eller udledt som specialanvendelse af en bredere funderet matematisk formuleret teori. I modsætning hertil tager *ad hoc* matematiske modeller udgangspunkt direkte i et foreliggende fænomen for at sammenfatte det i kompakt matematisk sprog. Hvor det empiriske belæg for *ad hoc* modellen hentes i den foreliggende situation, støtter den teoriafledte model sig indirekte til den bredere mængde empiri, som gennem hidtidige modelanvendelser af teorien har bidraget til teoriens konsolidering.



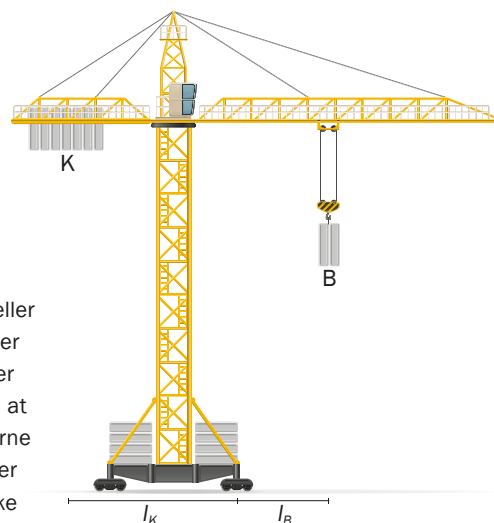
Illustration: Colourbox

Modellerne bag GPS-systemerne er afledt af geometri, Newtons mekanik, Einsteins specielle relativitetsteori og Einsteins generelle relativitetsteori. Det er teorier, som vi tror klippefast på indenfor deres praktiske domæner, så derfor har vi også stor tiltro til GPS-systemerne.

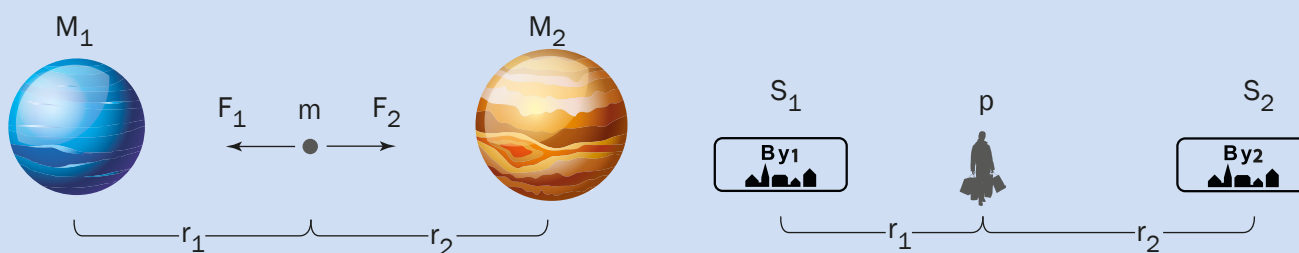
Teoretisk og empirisk kontrol af matematiske modeller

Den kvalitative forskel mellem teoriafledte matematiske modeller og *ad hoc* matematiske modeller ligger ikke i, at de teoriafledte er til at stole på, hvis teorien er til at stole på, mens *ad hoc* modellerne ikke er til at stole på. Så nemt er det desværre ikke. De teoretiske modeller kan uanset teoriernes troværdighed være bygget på så forsimpelende idealiseringer, at de er fejlvise. Og *ad hoc* modeller kan være så rige på datainput, at de kan fungere som troværdig kortlægning.

Den kvalitative forskel mellem teoriafledte matematiske modeller og *ad hoc* matematiske modeller ligger i, hvordan deres troværdighed kan kontrolleres. Hvor teoriafledte matematiske modeller både kan underlægges teoretisk kontrol og empirisk kontrol, kan *ad hoc* matematiske modeller kun underlægges empirisk kontrol. Lad os illustrere med eksemplet en byggekran.



Vi kan spørge om, hvornår kranen tipper om sit forreste støttepunkt på jorden. Hvis kranen har en belastning B i afstanden l_B fra støttepunktet og en kontravægt K i afstanden l_K fra støttepunktet, tipper kranen, hvis B gange l_B er større end K gange l_K . Sådan er det ifølge den newtonske mekaniks vægtstangsprincipper. De gælder her, som de gælder for vipperne på legepladsen. Og dog. Vi har jo set bort fra kran-konstruktionens massefordeling og dens bidrag til vægtstangsregnestykkerne. Men det tror vi på, at en veluddannet bygningsingeniør kan tage højde for, så der kan udarbej-



Newtons gravitationslov siger, at massetiltrækningen i afstanden r fra en klode med massen M er proportional med M/r^2 . Det kan man eksakt bruge til at beregne, om et objekt placeret et sted mellem to kloder, vil bevæge sig mod den ene eller anden klode. Den såkaldte "gravi-

tationsmodel" inden for by-geografi siger tilsvarende, at en person tilnærmelsesvis vil handle i den by, hvor S/r^2 er størst for personen – hvor S står for et eller andet mål for størrelsen af byen. Selvom de to modeller matematisk set ligner hinanden, er de væsensforskellige.

des en sikkerhedsforskrift, der er til at stole på, ad teoretisk vej. Hvis bygningsingeniøren er sjusket, vil en anden bygningsingeniør kunne kontrollere beregningerne. Uden at vippe kraner. Der er tale om en rent teoretisk kontrol.

Vi kan også efterspørge sandsynligheden for, at kranen i det hele taget havarerer på grund af tipning eller af alle mulige andre grunde. Det kan vi imidlertid ikke svare på teoretisk. Der findes ikke nogen teori, der kan udpege alle tænkelige måder, en kran kan havarere på. En matematisk model, der kan hjælpe for eksempel forsikringsselskaberne ved fastsættelse af forsikringspræmien i forhold til havari i mere generel forstand, må i fraværet af en indrammende teori alene bero på empirisk statistik vedrørende havarier.

Teoriafledte modelberegninger af tippeproblemet kan underlægges både teoretisk og empirisk kontrol. Ad hoc modelberegninger af havari-problemet kan kun underlægges empirisk kontrol.

Og forskellen betyder indirekte noget for troværdigheden af modellerne. Forskellen mellem vilkårene for at udøve empirisk kontrol (sammenligning med data) og teoretisk kontrol (sammenligning med teori) viser nemlig, at omstændighederne omkring brugen af de to typer matematiske modeller er sociologisk og politisk væsensforskellige. Empirisk

kontrol kræver adgang til data. Og denne adgang kan for eksempel monopoliseres af de, der har råd til at indsamle de ofte meget omfattende datamængder. Teoretisk kontrol af teoriafledte matematiske modeller kræver indsigt i teori. Denne indsigt er normalt forbeholdt særlige eksperter i kraft af deres uddannelser. Men uden stavnsbånd er det trods alt svært at forhindre, at nogle af de særligt uddannede kan optræde som modeksperter. Teoriafledte matematiske modeller er derfor alt andet lige mere tilgængelige for offentlig kritik end ad hoc matematiske modeller.

Forskelle tilslores af sprogbrug og udseende

Den væsensforskellige karakter af forskellige matematiske modeller er langt fra tydelig for den bredere offentlighed. Tværtimod vil den uindviiede typisk opfatte dem som ret ens på grund af deres ensartede matematiske form. Og offentligheden får ikke megen hjælp til at erkende de forskelle, der ligger bag matematikken.

I gymnasiets fysikundervisning fremstår Ohms lov og Coulombs lov eksempelvis som to ens fungerende hovedhjørnестene i elektricitetslæren. De er på samme måde vigtige formler i formelsamlingen som udgangspunkt for at regne nogle af fysikopgaverne. Men de to love er væsensforskellige, selvom jo også sprogbrugen sidestiller de to "love". Hvor Ohms lov, at spæn-

dingsforskellen mellem to ender af en ledning er lig med den elektriske strømstyrke i ledningen gange ledningens modstand ($U = R \cdot I$), er en ad hoc model, er Coulombs lov for kraftpåvirkningen imellem to elektriske ladninger en teoriafledt model. Ohms lov er en tilnærmelse, der alt efter omstændighederne kan være mere eller mindre berettiget, hvorimod Coulombs lov er sammenvævet med den bredere elektrostatik. Ifølge Coulombs lov er ladningernes gensidige kraftpåvirkning omvendt proportional med afstanden imellem dem i anden potens. Og det er eksakt, da det logisk hænger sammen med, at rummet har tre dimensioner. Helt præcist, og ikke kun tilnærmelsesvist.

Et andet eksempel til illustration af tilsøring af den kvalitative forskel mellem en ad hoc matematisk model og en teoriafledt model, hentet, ikke fra gymnasiet, men fra universitetsverdenen, er den såkaldte "gravitationsmodel" inden for by-geografi til vurdering af handelsoplandet for en by. Ifølge modellen antages en person tilnærmelsesvis at handle i den by, hvor S/r^2 er størst for personen. S står for et eller andet mål for størrelsen af byen og r for personens afstand til byen. Når modellen kaldes gravitationsmodellen er det fordi, den minder om Newtons gravitationslov ifølge hvilken massetiltrækningen i afstanden r fra en klode med massen M er proportional med M/r^2 .

Der er ikke noget forkert i at sammenfatte nogle by-geografiske data i en matematisk formel. Det kan være både praktisk og overbliksgivende. Men det er vildledende, hvis nogen bringes til at tro, at der herved er etableret en beregnings-situation svarende til brugen af Newtons gravitationslov i astro-nomi, fordi de to formler udvendigt og formelt ligner hinanden. Den by-geografiske model har status som Ohms lov, den astronomiske som Coulombs lov. I by-geografien tilpasses formlerne løbende til data. For eksempel ved at ændre r^2 til $r^{1.8}$ el. lign. I Newtons gravitations-lov gælder totalt i r^2 eksakt. Det hænger som i Coulombs lov logisk tvingende sammen med, at rummet har tre dimensioner.

Pragmatisk troværdighed kontra ontologisk sandhed

En anden slags tilsløring end den, der skyldes udviskningen af den kvalitative forskel mellem ad hoc modeller og teori afledte modeller, skyldes den tvetydige brug af ordet "teori". For de fleste fysikere er de fleste fysiske teorier som dem, GPS-systemet baserer sig på, mere virkelige end facts. Facts kan være udtryk for tilfældige fremtrædelser af den bagvedliggende væsens-struktur, som er det, teorierne udtaler sig om. Det betyder ikke, at vi tror, at teorierne er *ontologisk sande*, dvs. universelle og evigtgyldige. Vilkårene for at komme frem til ontologiske sandheder har været diskuteret af forskellige filosoffer med forskellige synspunkter – for eksempel de logiske positivister, Karl Popper og Thomas Kuhn. Men det, fysikere typisk er interesserede i, når de udvikler teori afledte matematiske modeller, er, om teorierne er *pragmatisk sande*, dvs. om de er troværdige inden for givne rammer. Selvom Einsteins relativitetsteori ontologisk set har falsificeret Newtons mekanik, har de pragmatisk set styrket Newtons mekanik ved at udstikke rammerne for dens gyldighed. Forvekslingen af filosofernes ontologisk rettede diskussion med diskussion af forskellige teoris pragmatisk troværdighed har



desværre bidraget til at tilsløre den kvalitative forskel mellem matematiske modeller afledt fra pragmatisk set sikre teorier (som udviklingen af GPS-systemet) og matematiske modeller afledt fra hypotetisk teori (som Finansministeriets regnemodeller).

En opgave for uddannelses-systemet

Jeg tænker, at løbende teoretisk kontrol har været helt afgørende for udviklingen af de matematiske modeller, der ligger til grund for, at GPS-systemet virker. Jeg tænker, at det ikke er overraskende, at der i modsætning hertil har været rum for debat og uenigheder vedrørende klimamodellerne, fordi det kun er dele af dem, der kan underlægges teoretisk kontrol. Andre dele har karakter af ad hoc modeller på et usikkert empirisk grundlag. For eksempel må der være usikkerhed om optaget af varme fra atmosfæren i havene i betragtning af, at varmfylden af atmosfæren kun svarer til rundt regnet de øverste ti meter af verdenshavene. Optaget må derfor afhænge af måden havenes vand cirkulerer på, som – så vidt jeg ved – ikke er særlig godt kortlagt i dybden.

Om den slags matematiske modeller, Finansministeriet benytter, tænker jeg, at de svarer til at navigere ved hjælp af plangeometri, fordi Jorden er antaget flad. Teoretisk kontrol har her karakter af kontrol af intern konsistens i modellerne. Modellerne kan være nyttige til at

præcisere forskellige økonomiske tankegange i forhold til hinanden. Men jeg tænker ikke, at modellerens prognoser er realistiske.

Mine vurderinger er en amatør. Jeg har ikke specialistviden om hverken GPS-modeller, klimamodeller eller Finansministeriets regnemodeller. Men ved at være fysiker og have erfaringer med forskellige andre matematiske modeller af varierende karakter synes jeg, at jeg har udviklet nogen dømmekraft i forhold til matematiske modeller i almindelighed.

Da matematiske modeller har stigende betydning i samfundet, er det demokratisk vigtigt, at almen dømmekraft om deres forskelligartede karakter bliver mere udbredt end det er tilfældet. Det burde blandt andet være en opgave for gymnasiet. Jeg forestiller mig ikke, at undervisningen på uoverkommelig vis skal forsøge at trænge ind i GPS-modellerne, klimamodellerne eller Finansministeriets regnemodeller. Men at den gennem arbejde med nemmere forståelige eksempler i stil med dem, jeg har givet i denne artikel, skal opbygge mere almen dømmekraft.

Generelle filosofiske overvejelser eller analyser af interessemod-sætninger er ikke tilstrækkelige udgangspunkter for dømmekraften. Eleverne må tilbydes konkrete sammenlignende, tværfaglige erfaringer med matematiske modeller. ■

Klimamodeller er eksempler på modeller, der delvist er teori afledte, delvist er ad hoc modeller, som kan hvile på usikkert empirisk grundlag, for eksempel usikkerhed om vandets cirkulation i verdenshavene. Derfor er det naturligt, at der kan være uenighed om dem. Foto: Colourbox

Videre læsning:
Foredraget *Mathematical Modelling – Hiding or Guiding?* af Jens Højgaard Jensen er trykt i Proceedings of MACAS-2017 Symposium (2018). Foredraget kan også se på YouTube.

Artiklen og foredraget er en udvidet oversættelse til engelsk af *Matematiske modeller – vejledning eller vildledning?* II fra 1990, som kan findes ved at google IMFUFA tekster og gå til tekst nr. 199, s. 49-59. (<http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/199.pdf>).