

NOTATION OG REPRÆSENTATIONERS BETYDNING FOR MATEMATIK

Notation, og det at have en velegnet repræsentation af et matematisk problem, spiller en afgørende rolle for håndteringen og udviklingen af matematik. Her vises nogle illustrerende eksempler på hvordan.

Der er en ofte fortalt historie om den berømte matematiker Gauss, der som ung skoledreng blev stillet et – troede hans lærer – svært problem, der skulle holde ham beskæftiget i noget tid. Læreren satte ham til at lægge alle tal fra 1 til 100 sammen. Desværre virkede det ikke: Gauss klarede opgaven på ganske kort tid, da han fandt en smart måde at opstille problemet:

$$\begin{array}{r} 1+ \quad 2+ \quad 3+ \dots +50 \\ 100+99+ \dots + 51 \\ \hline 101+101+ \dots +101 \end{array}$$

Ovenstående overbeviste Gauss om, at summen var 50 gange 101, som er lig 5050.

Generelt spiller det en stor rolle, når man laver matematik, at man har noget notation eller en velegnet repræsentation – noget der også er blevet bemærket af mange matematikere igennem tiden. Leibniz, som var meget optaget af at producere en velegnet (matematisk og logisk) notation, skrev for eksempel i 1677:

Spørg dig selv om du kan udføre nogen aritmetiske beregninger overhovedet uden at gøre brug af tal-symboler



Raphaels fresko "Skolen i Athen" i Vatikanpaladset i Rom, malet 1509-1511, viser en perlerække af antikkens filosoffer, heriblandt Pythagoras, som ses nederst til venstre (skrivende i en bog). Pythagoras grundlagde et broderskab eller religiøst fællesskab, kaldet pythagoræerne, der fulgte hans lære. Den første koloni lå i den græske koloni Kroton i Syditalien (i dag Crotone).

At regne med tal kræver en eller anden form for talsymboler. Det har vist sig, at vores talsystem, det arabiske 10-talssystem, er særdeles velegnet til både at repræsentere tallene og regne med dem. De fleste ville nok i dag gribe fat i en lommeregner, hvis der skal laves større beregninger – men bemærk, at udregningen stadig kræver en bestemt repræsentation af tallene: det vil nok være en større udfordring for de fleste at lægge

eller gange de to tal "to tusinde femhundrede og otteogtyve" og "nitusinde trehundrede og sytten" sammen uden først at oversætte dem til talsymboler i vores titalssystem.

En god måde at repræsentere et problem på kan desuden være afgørende for løsningen af det. Endvidere er det nogle gange en fordel at benytte sig af figurer, eller visuelle repræsentationer, når man vil løse

Om forfatteren



Jessica Carter er lektor ved Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet. Hendes forskning kombinerer matematikens videnskabsteori og historie. Hun interesserer sig blandt andet for, hvordan repræsentationer, herunder diagrammer, bidrager til udviklingen af ny matematik. jessica@imada.sdu.dk

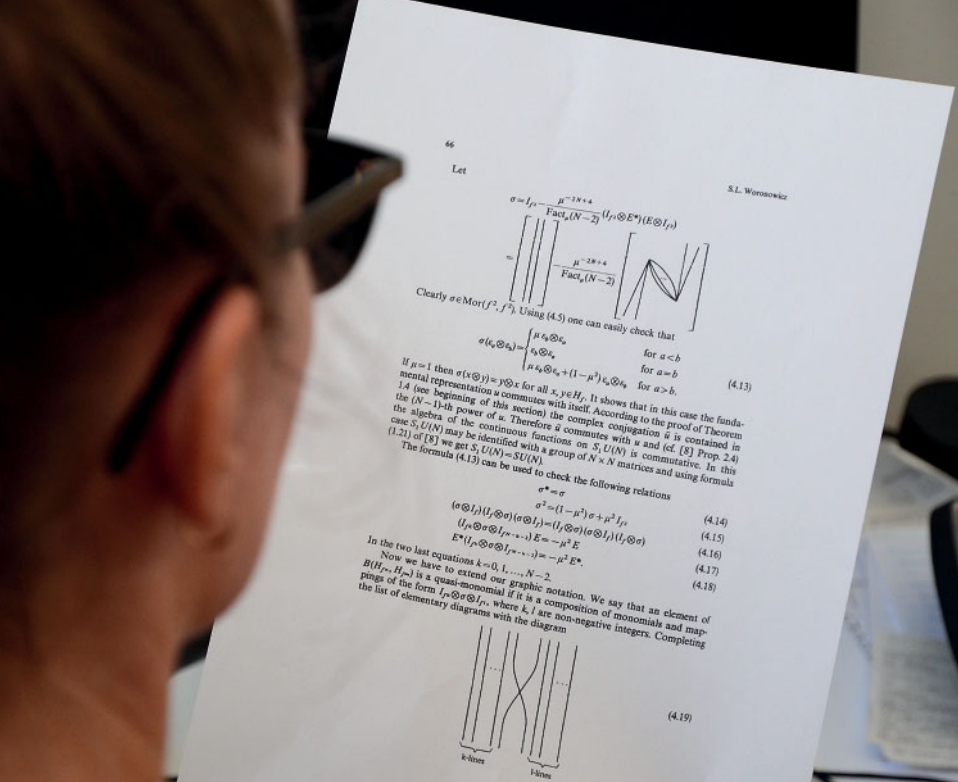
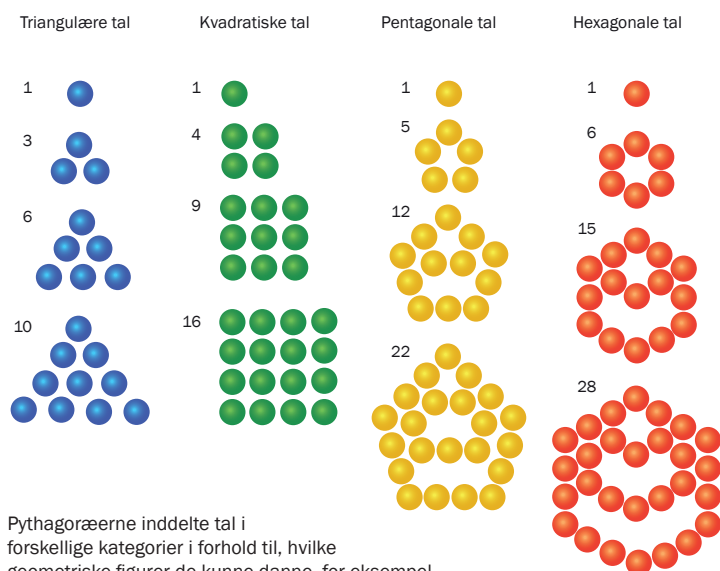


Foto: Carsten R. Kjaer

Repræsentationer og notation er et kendetegn for matematikken og spiller en afgørende rolle for, hvad vi kan se og gøre i matematik.



Pythagoræerne inddelte tal i forskellige kategorier i forhold til, hvilke geometriske figurer de kunne danne, for eksempel trekanttall, kvadrattall, pentagontall og hexagontall.

et problem. Et eksempel, som vi betragter nedenfor, er at finde heltals-tripler, som opfylder Pythagoras sætning, dvs. at finde heltal a , b , c så $a^2 + b^2 = c^2$.

Det skal understreges her, at jeg hermed ikke påstår, at figurer generelt kan bruges til at bevise udsagn i matematik. Jeg taler om, at resultater kan opdaget eller anskueliggøres ved hjælp af visuelle repræsentationer. Her vil jeg især fokusere på, hvordan notation og forskellige måder at repræsentere

problemer på, inklusive som diagrammer, hjælper os til at opdage sammenhænge, og at de kan bidrage til at *anskueliggøre* disse.

I denne artikel vil jeg således give nogle konkrete eksempler på, hvordan repræsentationer og notation spiller en rolle for, hvad vi kan se og gøre i matematik. Overordnet kan man tale om, at notation eller en bestemt repræsentation på den ene side har potentiale til at vise forskellige aspekter ved et matematisk

begreb og på den anden side give mulighed for forskellige manipulationer (svarende til en udledning af egenskaber hos begrebet). Jeg vil her vise eksempler på, hvordan en geometrisk repræsentation kan give anledning til ny indsigt og omvendt, hvordan algebraisk notation har bidraget til en løsning af problemer.

Manipulation af repræsentationer

Det meste af matematisk problem-løsning og ræsonnement kræver, at man gør brug af en eller anden form for matematisk notation. Som et simpelt eksempel kan vi betragte begreberne "lige" og "ulige tal". Hvis jeg vil bevise sætninger om disse, er det en fordel at udtrykke dem på en måde, der afspejler deres matematiske egenskaber eller struktur. Det er karakteristisk for et lige tal, at det er deleligt med 2, hvorfor vi kan skrive et vilkårligt lige tal, n , på formen $n = 2 \cdot k$ for et naturligt tal k . (Tilsvarende kan et ulige tal skrives som $n = 2 \cdot k + 1$.) Udstyret med denne repræsentation, kan vi udlede forskellige sætninger. For eksempel at *kvadratet på et lige tal er lige*: Vi repræsenterer et lige tal, n , som før: $n = 2k$. Vi kvadrerer dette, og benytter nogle algebraiske regneregler (hvilket svarer til, at vi manipulerer den givne repræsentation):

$$n^2 = (2k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

Vi observerer, at det sidste udtryk igen er på formen $2m$ for et naturligt tal m (som er $2k^2$), og at det derfor er lige. Tilsvarende beregning på $n = 2 \cdot k + 1$ kan udføres for at konstatere, at kvadratet på et ulige tal er ulige.

Repræsentation som opdagelsesværktøj

Pythagoras' sætning angiver en relation mellem siderne i en retvinklet trekant, at *kvadratet på hypotenusen er lig summen af kvadraterne på kateterne*. Hvis disse sider betegnes henholdsvis, c , a og b kan sætningen skrives: $c^2 = a^2 + b^2$. Det er uvist, hvem der først beviste denne sammenhæng. Der findes et utal

af argumenter for sammenhængen, nogle er rent visuelle, mens andre kombinerer geometriske og algebraiske argumenter. Det er ikke beviset for Pythagoras' sætning, vi skal se på her. Jeg har i stedet valgt at illustrere et andet problem i relation til sætningen. Det er velkendt, at der findes forskellige heltals-tripler, som opfylder relationen. For eksempel kan tallene 3, 4 og 5 indsættes: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Spørgsmålet er, hvordan man finder frem til disse tripler?

En repræsentationsform, som Pythagoræerne brugte, kan benyttes til at finde heltalsløsninger. "Pythagoræerne" refererer til følgerne af Pythagoras (ca. 572-497 f. Kr.), som dannede en skole ved Croton i det nuværende Italiens sydspids. De repræsenterede tal ved at placere småsten i mønstre i form af forskellige geometriske figurer og blev hermed i stand til at formulere forskellige sammenhænge. Ét eksempel er en repræsentation af tal som *kvadrattal*.

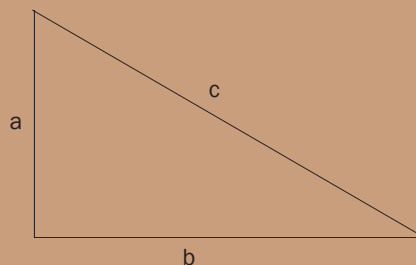
I figur 2 i faktaboksen ses, at et kvadrattal kan opdeles i et "indre kvadrat" samt en rest, der tilsammen kan udtrykkes som $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. Dette minder om Pythagoras' sætning – hvis bare $2n+1$ svarer til et kvadrattal. Vi kan derfor lede efter kvadrattal, som er ulige tal, for derefter at bestemme hvad "n" svarer til. Man kan vise, at ulige kvadrattal præcis svarer til kvadratet på ulige tal. Vi har derfor en systematisk måde at lede efter tripler: Vi kan forsøge os med det første ulige tal, 3, som kvadreret giver $9 = 2 \cdot 4 + 1$. Det giver $n = 4$ og $n+1 = 5$. Det giver os triplet (3, 4, 5). Næste ulige tal er 5, som giver $n = 12$, og $n+1 = 13$, og følgende heltalsløsning (5, 12, 13). Forklaring og yderligere heltalsstripler findes i den tilhørende faktaboks.

Notation bidrager til at sammenhænge bliver synlige

Eksemplet før illustrerer, hvorledes en geometrisk repræsentation kan frembringe struktur; i det konkrete

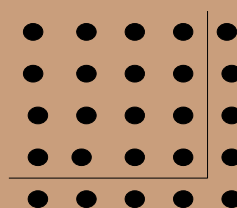
Pythagoræiske tripler

Pythagoras' sætning siger om en retvinklet trekant med sider a, b og c placeret som i figuren, at $c^2 = a^2 + b^2$.



Figur 1

For at bestemme heltalsløsninger til denne ligning betragter vi en repræsentation, som formentlig er benyttet af Pythagoræerne. Betragt figuren nedenfor. Det er tydeligt, at den har form som et kvadrat, og antallet af prikker kan derfor beregnes som kvadratet på siden.



Figur 2

I den viste figur indeholder siden 5 prikker og kvadratet derfor i alt $5 \cdot 5 = 25$. Vi kan også opsplitte kvadratet som vist i figuren, hvor det er lig summen af det indre kvadrat og den ydre figur, som kaldes et gnomon. Det ses, at det indre kvadrat har side én mindre end det store, og at der er dobbelt så mange prikker i gnomonet som siden i det lille kvadrat plus én, altså $2 \cdot 4 + 1$. Hvis vi nu forestiller os, at vi har en lignende figur med et vilkårligt antal prikker, et kvadrat sammensat af et indre kvadrat med $n \cdot n = n^2$ prikker og det ydre gnomon lig $2 \cdot n + 1$ og det ydre kvadrat med $(n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2$ prikker, opnår vi følgende generelle udtryk:

$$n^2 + (2 \cdot n + 1) = (n + 1)^2$$

Dette har ikke helt form som Pythagoras' sætning – men hvis leddet $2 \cdot n + 1$ er kvadratet på et tal, så har vi jo netop en sum af to kvadrattal, som er lig et tredje. Af formen, $2 \cdot n + 1$, ses, at tallene må være ulige, så vi kan lede efter ulige kvadrattal. De første af disse er 9, 25, 49 og 81. Hvis vi ser på tallet 25, så kan det skrives $25 = 2 \cdot 12 + 1$, hvilket giver $n=12$. Nu har vi således tallene, der kvadreret giver, hvad der svarer til $2 \cdot n + 1$ og n^2 fra ligningen ovenfor. Det sidste, der mangler er $n+1$, som her bliver 13. Vi får derfor triplet (5, 12, 13). Kvadratet på 7 er 49, som vi kan skrive som $2 \cdot 24 + 1$. Så her bliver n lig 24 og $n+1$ giver 25 og dermed får vi triplet (7, 24, 25). Den sidste værdi for n er 40, hvilket giver triplet (9, 40, 41).

Ved at forsøge sig med andre opdelinger af kvadratet i et mindre kvadrat og en anden figur, kan der opnås flere heltalsstripler. Hvis læseren i stedet for ovenstående opdeling forsøger sig med at skære to prikker fra i det ydre gnomon, kan man for eksempel opnå heltalsløsningen (6, 8, 10).

tilfælde, hvordan et kvadrat kan splittes op i mindre kvadrater. I dette afsnit ser vi, hvordan ny (algebraisk) notation kan være medvirkende til, at vi kan få øje på sammenhænge, som tidligere har været umulige

at se. For at illustrere dette giver jeg et eksempel fra overgangen fra geometri til analytisk geometri, som var medvirkende til, at franskmanden René Descartes kunne formulere en formodning om, hvorfor de

De Klassiske Problemer

De klassiske problemer blev formuleret, og forsøgt løst i det antikke Grækenland. Forudsætningen for løsningen var, at den udelukkende måtte benytte sig af en passer og en lineal (uden måleenhed). De tre problemer er følgende:

Fordobling af terningen. Givet en terning med et vist rumfang, konstruér siden i den terning, som har det dobbelte rumfang.

Vinklens tredeling siger, at man givet en vilkårlig vinkel skal kunne konstruere en vinkel med en tredjedel af dens størrelse.

Cirkelns kvadratur kræver, at man, givet en vilkårlig cirkel, skal kunne konstruere et kvadrat med samme areal.

Problemerne blev oprindeligt formuleret fra omkring midten af det 5. århundrede f.Kr. En af de første, som arbejdede med terningens fordobling og cirkelns kvadratur, var Hippocrates fra Chios. De to første problemer er formentlig inspireret af, at lignende, simple problemer kunne løses. Det er muligt både at halvere en vinkel og at bestemme siden i et kvadrat, som fordobler arealet af et givet kvadrat. Sidstnævnte problem indgår i en af Platons dialoger, Menon, som del af en illustration af, hvorledes vi erkender matematiske sandheder. Cirkelns kvadratur beskriver en generel søgen efter en måde at beregne arealet af en cirkel.

Hippocrates fandt ud af, at fordoblingen af terningen kunne løses, hvis man kunne finde "to tilhørende mellemproportionaler" – med andre ord, givet to tal a og b , skal der bestemmes to andre, x og y , så

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Vi kan først konstatere, at hvis vi har en terning med side a og dermed rumfang a^3 skal der bestemmes en side x (i den nye terning), som opfylder, at $2a^3 = x^3$. Hvis vi nu antager, at vi kan løse problemet med at bestemme mellemproportionaler, svarer ovenstående til, at vi skal bestemme mellemproportionaler for a og $2 \cdot a$. Med andre ord, skal vi finde x og y , så

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

x 'et i denne giver den eftersøgte løsning. Vi regner først på $\left(\frac{a}{x}\right)^3$:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a}$$

I det midterste udtryk udnyttes i den anden faktor, at $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ og i den sidste faktor, at $\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$.

Det indses herefter, at x , y og a kan forkortes væk, da de alle optræder én gang både i tæller og i nævner:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$$

Tilbage står, at $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}$. Hvis vi ganger med 2, og derefter med x^3 , på begge sider, kan udtrykket omformes til $2a^3 = x^3$. Resterende er kun at bestemme x : Det kan fx findes som skæringspunkt mellem parablen $a \cdot y = x^2$ og hyperblen $y = \frac{2a^2}{x}$.

såkaldte klassiske problemer ikke kunne løses med passer og lineal.

I det antikke Grækenland formulerede man de såkaldte Klassiske problemer. Et af disse kaldes "Terningens fordobling". Hvis der er givet en terning med et bestemt rumfang, så skal man konstruere siden i en terning med det dobbelte rumfang. For alle problemer gælder, at løsningerne skal kunne findes udelukkende ved at gøre brug af passer og lineal (uden måleegenskaber). På trods af mange geniale løsninger, hvor man brugte andre værktøjer, kunne problemet ikke løses med de givne forudsætninger.

I 1637 præsenterede Descartes i sin bog "La Geometrie", *Geometrien*, en forklaring på hvorfor. I denne formulerer Descartes grundstenen til den analytiske geometri og introducerer det, som bliver til det kartesiske koordinatsystem. I dette værk viser han, hvorledes geometriske konstruktionsproblemer kan oversættes til ligningssystemer og demonstrerer, hvordan de kan løses algebraisk. Derefter viser han, hvordan løsningerne til ligningerne kan konstrueres geometrisk.

Han viser, at problemer, som giver anledning til en andengradslikning, har en løsning, som kan konstrueres ved hjælp af passer og lineal. Omvendt kan problemer, der oversættes til en ligning hvis grad er tre, ikke nødvendigvis løses med disse redskaber. Specielt kan løsningen af problemer, som giver anledning til en tredjegradslikning, som ikke har rationale rødder, ikke konstrueres. Hvis man oversætter fordoblingen af terningen til en ligning, bliver det netop til en sådan tredjegradslikning, og løsningen kan derfor ikke konstrueres med disse værktøjer.

Men for at alt dette kan indses, er man nødt til have noget notation, som tillader, at man kan tale om anden, tredje, eller generelt n 'te gradsligninger. En forudsætning for Descartes' indsigt var, at han blandt andet indførte konven-



Portræt af den franske filosof og matematiker René Descartes (1596-1650), malet af Frans Hals. Blandt Descartes bidrag til matematikken var en forklaring på, hvorfor de såkaldte klassiske problemer ikke kunne løses med passer og lineal.

tionen, at et tal ganget med sig selv et antal gange skal skrives ved hjælp af en potens, for eksempel at $a^3 = a \cdot a \cdot a$. En anden konvention var, at linjestykker betegnes ved et

enkelt bogstav (for eksempel "a") i stedet for ved deres endepunkter, som blev benyttet i den tidligere græske matematik, fx hos Euklid. Konstruktionen af et kvadrat eller en terning på et linjestykke kan således udtrykkes algebraisk som a^2 eller a^3 . Ved oversættelse af de geometriske problemer opnår man så ligninger i *forskellig grad* – udtrykt ved tallet i potens. Denne information kan ikke observeres i den geometriske kontekst, der består af geometriske figurer og simple kurver samt konstruktioner af disse.

Til sidst skal det lige nævnes, at Descartes ikke var i stand til at formulere et stringent bevis for sin påstand. Beviset kræver begreber fra den abstrakte algebra, som først blev introduceret i løbet af det 19. århundrede.

Forskellig notation giver forskellige fordele

Ovenstående illustrerer, hvordan indførelse af notation og en velegnet repræsentation gør det muligt

at opnå nye indsigter i matematikken. Endvidere så vi i starten af artiklen, hvordan notation benyttes i beregninger og kan udnyttes i matematisk bevisførelse. I eksemplet med de Klassiske problemer, fordoblingen af terningen, så vi, at der er to måder at repræsentere og håndtere problemerne – både geometrisk og algebraisk. Tilsvarende findes eksempler på, at der er forskellige systemer af notation for det samme matematiske område. For eksempel har man igennem historien benyttet et utal af symbolsystemer for tallene. De fleste har, udover vores arabiske titalssystem, også stødt på det romerske additive talsystem. Hvert af disse systemer har forskellige fordele. I det tilhørende materiale i online-versionen af denne artikel illustreres denne pointe – at der kan være forskellige systemer af notation for det samme matematiske område, og at disse systemer har forskellige styrker, afhængig af hvad de bruges til. Det konkrete område, der tages udgangspunkt i, er udsagnslogik. ■

Yderligere læsning
På Aktuel Naturvidenskabs hjemmeside finder du supplerende materiale til denne artikel i form af artiklen: *Udsagnslogik - styrker og svagheder ved forskellige systemer af notation*.

Florian Cajori 2011: *A history of mathematical notations*. Dover Publications.

Victor J. Katz 2009: *A History of Mathematics. An Introduction*. 3rd Edition. Pearson Education, Inc.

Jesper Lützen 1993: *Cirkelns kvadratur, vinkelens tredeling og terningens fordobling*. 2. oplag. Systime.

Få pladser grundet COVID-19 restriktioner

sdu.dk/ing #sduing

Faldskærm i fart på Alsion

Vi inviterer alle fysikhold i det almene gymnasium og htx til Faldskærm i fart-konkurrencen på Alsion i Sønderborg torsdag den 3. december 2020.

Faldskærm i fart på SDU Sønderborg er en konkurrence for gymnasier, hvor fysikklasser på alle niveauer er inviteret til at dyste med deres egne selvbyggede faldskærme i de to konkurrencediscipliner Premium Class Award og Innovation Award.

Tilmeldte klasser får tilsendt et Faldskærm i fart-kit med undervisningsmateriale, der kan anvendes i forberedelsen til konkurrencen, samt materialer og udstyr, der egner sig til at konstruere små faldskærme af.

På konkurrencedagen sendes faldskærmene ud i frit fald på 12,5 meter inde i universitetsbygningen Alsion. Tilmeldte klasser kommer enkeltvis til faldskærmskast. Program følger efter tilmelding.

Der er flotte præmier til vinderne af de to konkurrencediscipliner.

Tilmeldingsfrist er fredag den 30. oktober.

Mere information og tilmelding finder du her:

www.sdu.dk/faldskaermskonkurrence