

Uendelighed: En matematisk idé, vi ikke kan leve uden

Uendelighed er et begreb, som har voldt matematikerne kvaler gennem tiden. Men med udviklingen af mængdelæren fik de styr på problemerne, hvilket blandt andet udmøntede sig i den erkendelse, at nogle uendeligheder er større end andre.

Af Asger Törnquist



ASGER TÖRNQUIST

Asger Törnquist er lektor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, og er formand for Dansk Matematisk Forening. Han forsker og underviser i logik og mængdelære med særlig interesse for anvendelser indenfor andre grene af matematik, for eksempel operator-algebra og dynamiske systemer. Han interesserer sig særligt for de problemer i andre grene af matematik, som ligger ved grænsen for hvad det nuværende grundlag for matematik kan håndtere.

asgert@math.ku.dk

I perioden cirka 1872-1900 gjorde den tyske matematiker Georg Cantor en række skelsættende opdagelser om uendelighed i matematik. Cantor opdagede blandt andet, at ikke alle uendeligheder har den samme størrelse: Nogle uendeligheder er simpelthen større end andre uendeligheder!

Cantors opdagelser var så chokerende for datidens matematikere, at nogle helt afviste hans ideer. Men den indflydelsesrige matematiker David Hilbert gav sin stærkeste støtte til Cantors teori. Hilbert indså nemlig, at Cantors teori, som kaldes *mængdelære*, var matematikkens chance for at få styr på alle de problemer, som uendelighed havde voldt igennem årtusinder. I denne artikel vil jeg fortælle om, hvorfor uendelighed er så vigtigt for matematik, om uendelighedens historiske udfordringer, og om hvordan vi ser på Cantors teori i dag.

Uendelighed på Hilberts hotel

Uendelighed dukker op i matematik helt fra begyndelsen. For eksempel virker det oplagt, at der er uendeligt mange positive hele tal 1,2,3,4, ... osv., for det næste tal i rækken fås altid ved at lægge 1 til, og den proces stopper aldrig.

Uendelighed er noget spøjst noget. Forestil dig som tankeeksperiment et hotel med uendeligt mange værelser, nummereret 1,2,3,4, ... osv. Vi kalder det *Hilberts hotel*. En nat, hvor alle værelser er optaget, klager mange gæster over støj fra naboværelserne. Hvad gør den kvikke portier? Han beder alle gæsterne flytte over i værelserne med ulige numre, 1,3,5,7, ... osv., sådan at der bliver et tomt værelse mellem hvert beboet værelse, og dermed nattero. Helt konkret kan vi bede

gæsten på værelse x flytte til værelse $2x-1$, dvs. $x-1$ værelser længere hen ad gangen (se illustration).

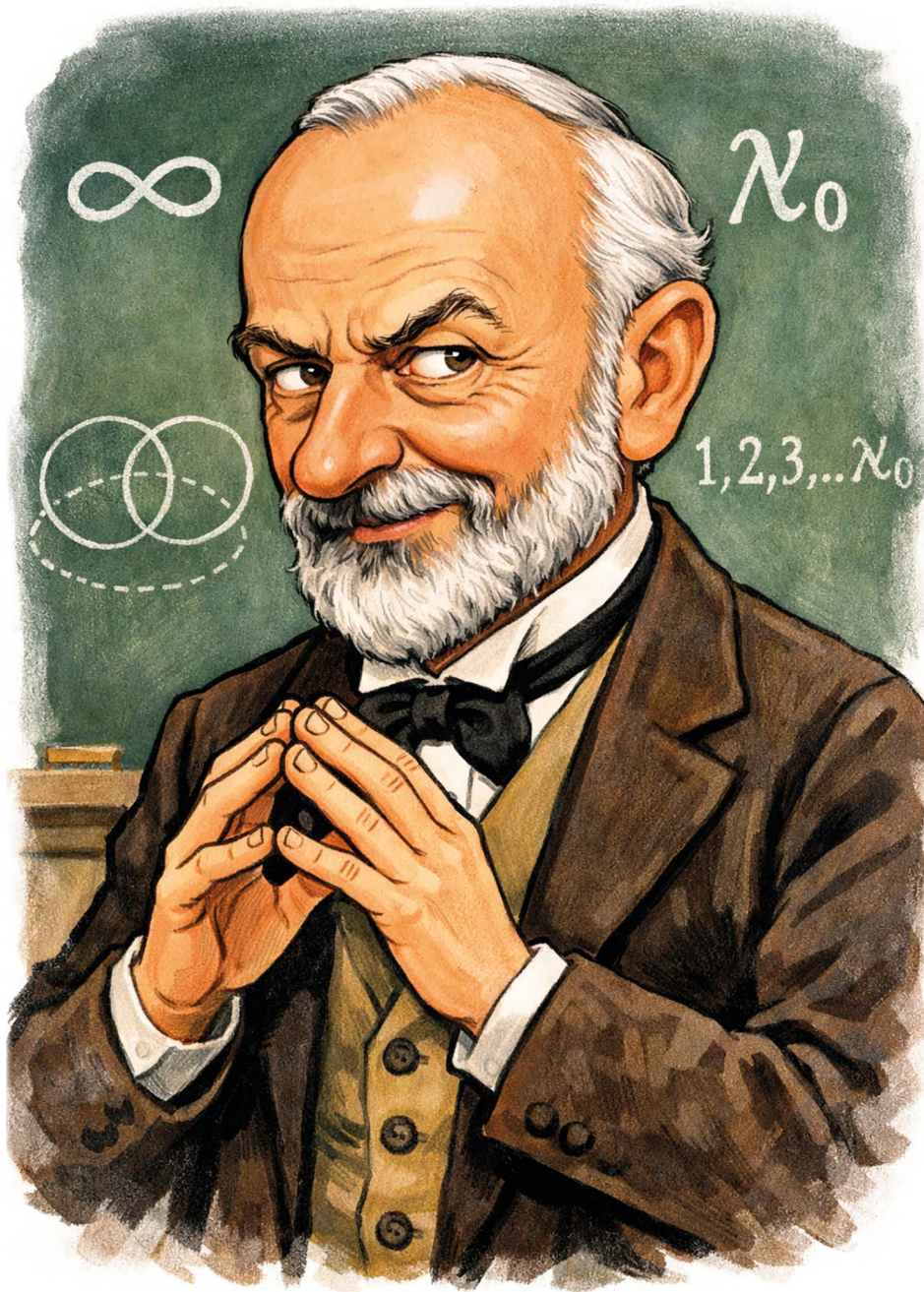
Den ville ikke gå på et endeligt hotel, for så kom der til at mangle værelser til cirka halvdelen af gæsterne. Men på et uendeligt hotel er der masser af plads!

Eksemplet illustrerer, at der i en vis forstand er præcis lige så mange *ulige* positive hele tal, som der er positive hele tal, selvom vi intuitivt synes der kun er halvt så mange. For ligesom jeg kan indse, at jeg har lige mange fingre på højre og venstre hånd ved at parre fingrene sammen en-til-en, så parrer portierens omrokering alle de positive hele tal sammen med de positive ulige tal en-til-en.

Uendelighed er vigtigt

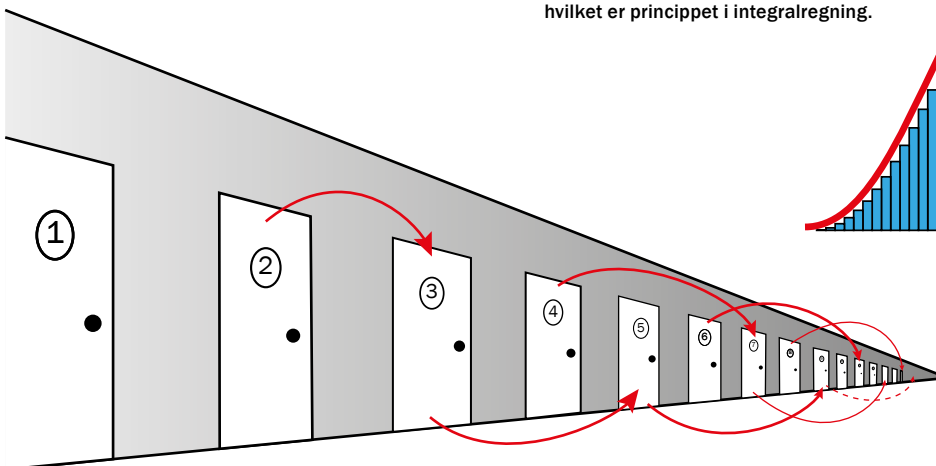
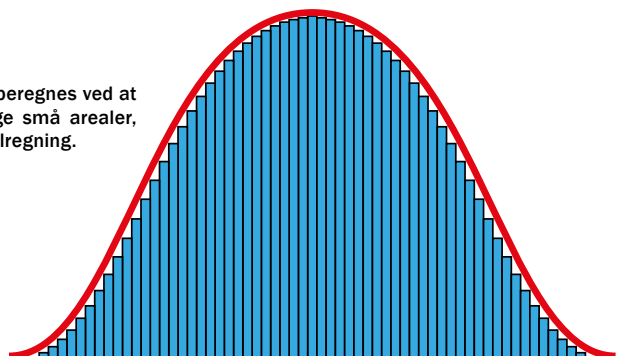
Hilberts hotel er et sjovt tankeeksperiment, men man kan spørge om matematisk uendelighed egentlig er vigtigt? Uendelighed er vigtigt, blandt andet fordi matematik baseret på uendelighed bruges af fysikere, ingeniører, klimaforskere, økonomer, statistikere, og mange andre til ting, der er kritiske for mennesker og samfund. Derfor skal matematik baseret på uendelighed være lige så solid og fejlfri, som al anden matematik.

Når man lærer differential- og integralregning i gymnasiet, møder man her matematik, hvor uendelighed for alvor bliver vigtigt. Her forklares udregningen af arealet under en graf ved integralregning med, at området skæres ud i uendelig mange uendelig små rektangler, som integralet summerer. Integralet baserer sig altså på en ret avanceret anvendelse af uendelighed, og man må spørge sig



Cantor parrer sine fingre en-til-en og illustrerer dermed, at der i en vis forstand er lige så mange *ulige* positive hele tal som positive hele tal. Figuren er lavet med ChatGPT.

Arealet under en kurve kan beregnes ved at opdele det i uendelig mange små arealer, hvilket er princippet i integralregning.



På Hilberts hotel skal alle flytte hen på værelse nr. $2x-1$, hvor x er det værelsesnummer, man starter i.

selv: Giver det virkelig mening at lægge "uendeligt mange, uendeligt små" arealer sammen? Er det ikke en tvivlsom idé?

Differential- og integralregning blev udviklet parallelt og uafhængigt af Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz i anden halvdel af 1600-tallet. Det gjorde de i høj grad med øje for at løse problemer i fysik og astronomi. Selvom man kan tvivle på, at ideen bag giver mening, så stemmer resultaterne, man får, med den fysiske virkelighed.

Er det ikke godt nok? Ikke for matematik. Matematik er et fag grundlagt på stringente beviser, baseret på logisk argumentation. Det er det, der giver matematisk viden en særstatus i vores samfund. Det var i antikkens Grækenland, for cirka 2500 år siden, at matematik baseret på beviser blev opfundet. De gamle grækere udviste en særlig forsigtighed overfor uendelighed, for man vidste, at uforsigtighed førte til paradokser. Det var den forsigtighed, som Newton og Leibniz smed overbords.

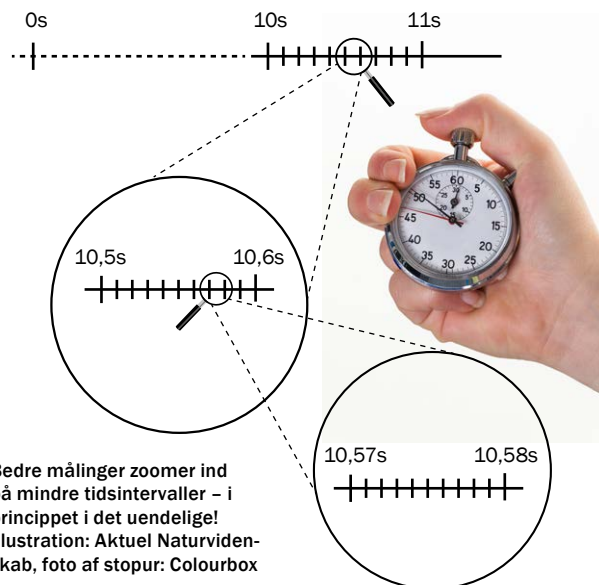
Et kontinuum af udfordringer

Stort set alle seriøse problemer med uendelighed har sin oprindelse i, hvordan kontinuert bevægelse beskrives matematisk. Det havde filosofen Zenon på komisk vis allerede illustreret for over 2400 år siden med sine paradokser, for eksempel *Achilleus og skildpadden* (se faktaboks).

I vores dagligdag dukker kontinuitet typisk op, hvor vi bruger komma-tal. Hvis en sprinter løber 100-meterløb, hvor lang tid tager det så, før hun kommer i mål? Hvis vi kun har et stopur, der måler sekunder, kan vi kun måle hendes tid med 1 sekunds nøjagtighed. For eksempel at hendes tid t er mindst 10 sekunder, og under 11 sekunder, dvs. $10s \leq t < 11s$. Vi får altså et tidsinterval af længde 1 sekund, lad os kalde det I_0 . Med et ur, der måler tiendedele sekunder får vi et mere nøjagtigt tidsinterval I_1 , måske $10,6s \leq t < 10,7s$, dvs. en nøjagtighed på 1 decimal. Med hundrededele? Et tidsinterval I_2 f.eks. $10,68s \leq t < 10,69s$, og altså 2 decimalers nøjagtighed.

Vi har altså den idé, at der mellem 0 og 11 sekunder findes et uafbrudt kontinuum af tid, som i øvrigt også strækker sig før og efter løberens løb. Det kræver muligvis uendeligt mange decimaler at beskrive løberens virkelige tid helt præcist, og forskellige stopure giver os kun tidsintervaller, som er approksimationer til den virkelige tid.

Den franske matematiker Cauchy opbyggede i 1800-tallet en matematisk teori om det uafbrudte kontinuum på baggrund af idéen, at enhver måleproces $I_0, I_1, I_2, I_3, \dots$, hvor måleintervallerne hurtigt bli-



ZENONS PARADOKSER

For knap 2500 år siden opstillede filosofen Zenon tre paradokser om bevægelse:

Bevægelse er umulig. For at bevæge sig fra A til B skal man først bevæge sig halvvejen, og dernæst halvvejen af det resterende stykke, osv., i det uendelige.

Achilleus og skildpadden. Hurtigløberen Achilleus skal løbe om kap med en skildpade. Skildpadden gives et forspring. Imens Achilleus indhenter forspringet, har skildpadden bevæget sig yderligere et stykke frem og igen fået et forspring, som Achilleus skal indhente, osv. i det uendelige.

Den flyvende pil. En pil, der flyver gennem luften, er i ethvert øjeblik præcis et sted i rummet, og bevæger sig derfor ikke. Da pilen aldrig bevæger sig, er bevægelse umulig.

Hvis vi bruger Cauchys kontinuum til at beskrive bevægelse matematisk, falder alle Zenons paradokser. Dette kræver naturligvis, at vi accepterer Cauchys teori!

CANTORS DIAGONALARGUMENT

Hvis $\mathbb{R}$ og $\mathbb{N}$ havde samme størrelse, kunne de reelle tal (decimaltal) "parres" en-til-en med de positive hele tal, dvs. vi kunne finde en liste

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

over alle decimaltal, hvor x_i er det decimaltal, der parres sammen med i .

Cantor beviste, at sådan en liste findes ikke. Det er nemmere at illustrere Cantors ide, hvis vi kun kigger på tal *mellem* 0 og 1. Så lad os sige, at samtlige decimaltal mellem 0 og 1 kan listes, for eksempel som det er gjort her (ignorér i første omgang det blå tal):

c :	0,4 9 6 8 3 5 8...
x_1 :	0,2 6 0 9 4 7 2...
x_2 :	0,5 7 2 9 4 8 3...
x_3 :	0,9 7 8 2 9 5 7...
x_4 :	0,8 8 8 6 2 6 4...
x_5 :	0,5 8 1 5 1 1 4...
x_6 :	0,2 2 7 7 2 3 1...
x_7 :	0,3 2 8 2 2 6 6...
	⋮

Listen er uendelig lang, og hvert tal på listen har uendeligt mange decimaler.

Hvad er så det blå tal c? Og hvordan kommer vi frem til c?

Det blå tal c får vi ved at "diagonalisere" listen $x_1, x_2, x_3, \dots$, ved at se på de røde tal. Bagefter indser vi, at c ikke står på listen $x_1, x_2, x_3, \dots$.

Vi vælger første decimal i c til at være forskellig fra 0 og 9, og sådan at:

- den er forskellig fra første decimal i x_1 , og
- den er ikke "nabo" til første decimal i x_1 .

Det betyder, at vi kan vælge den første decimal i c til at være 4,5,6,7 eller 8, men *ikke* 0,1,2,3 eller 9. Lad os sige, at vi vælger 4 som første decimal i c.

Anden decimal i c vælges nu sådan, at den er forskellig fra 2. decimal i x_2 og ikke er nabo til 2. decimal i x_2 . Vi kan altså vælge 0,1,2,3,4,5,9, men ikke 6,7,8. Lad os sige, vi vælger 2. decimal i c til at være 9.

Tredje decimal i c skal være forskellig fra 3. decimal i x_3 , og ikke nabo til 3. decimal i x_3 . Valgmulighederne er derfor 0,1,2,3,4,5,6. Vi vælger for eksempel 6.

Sådan fortsætter vi for evigt, og opnår til sidst det blå tal c.

Men se, tallet c står ikke på listen $x_1, x_2, x_3, \dots$! For c kan ikke være x_1 , for vores valg af 1. decimal i c sørger for, at der er et "mellemrum" mellem x_1 og c af mindst længde $1/10$. Og c kan ikke være x_2 , for vores valg af 2. decimal sørger for, at der et mellemrum mellem x_2 og c af mindst længde $1/100$. Osv. i det uendelige!

ver mindre og mindre, identificerer præcis ét (tids-)punkt i dette kontinuum. Cauchys kontinuum kalder vi i dag *de reelle tal*. Med afsæt i Cauchys arbejde fik man i løbet af 1800-tallet en matematisk stringent teori om kontinuitet, og for differential- og integralregning. Den nye teori lagde også Zenons paradokser endeligt i graven.

Cauchys teori er flot, men der er en pris: Kommatal, som løberens tid, skal nu opfattes som *resultatet* af en uendelig proces af bedre og bedre målinger. Dvs. at løberens virkelige tid er noget, vi kommer frem til, *efter* noget der er uendeligt!

Mængdelære: Uendelighedens moderne gennembrud

Det var med afsæt i Cauchys arbejde, at Georg Cantor fra omkring 1870 og frem begyndte at udvikle sin vidtgående teori om uendelighed, *mængdelæren*. Cantors teori vokser naturligt frem, hvis vi tager alvorligt, at nogle objekter i matematik er *et slutresultat af en uendelig proces*. For eksempel:

- Tallene 1,2,3,4,... opstår ved at gentage processen "læg 1 til" for evigt. Denne uendelige proces har som slutresultat et matematisk objekt, nemlig *mængden* af alle positive hele tal 1,2,3,4,..., som vi bruger symbolet $\mathbb{N}$ for.
- Ethvert reelt tal (dvs. "kommatal") er i følge Cauchy resultatet af en uendelig approximationsproces. Når *samtlige* approximationsprocesser er færdiggjorte, så fremkommer der et slutresultat, nemlig *mængden* af alle reelle tal, som vi bruger symbolet $\mathbb{R}$ for.

Cantors fidus er altså, at det, der er opstået efter en eller mange uendelige processer, kan samles sammen til ét enkelt objekt, en *mængde*. Dette ene objekt består måske i sig selv af uendeligt mange dele. For eksem-

pel består objektet $\mathbb{N}$ af de uendeligt mange tal 1,2,3,4,...

Cantor begyndte fra omkring 1870 og frem at udvikle teorien om mængder, altså *mængdelæren*, og anført af Hilbert tog den næste generation af matematikere teorien til sig.

Nogle uendeligheder er større end andre

Læser man beskrivelsen af mængden $\mathbb{R}$ ovenfor, så er det klart, at der sker et spring i kompleksitet i forhold til mængden $\mathbb{N}$: Mængden $\mathbb{N}$ er nemlig "bare" resultatet af en enkelt uendelig proces, nemlig at blive ved med at lægge 1 til i al evighed. Men $\mathbb{R}$ er det samtidige resultat af *alle* tænkelige approksimationsprocesser i Cauchys forstand.

Da vi talte om Hilberts hotel indså vi, at der er lige så mange ulige positive hele tal som der er positive hele tal, fordi de kan sammenparres en-til-en, som portieren gjorde. Cantor må have spurgt sig selv, om $\mathbb{R}$ virkelig er et mere kompliceret objekt end $\mathbb{N}$, eller om det bare ser sådan ud. Helt konkret undersøgte han, om $\mathbb{R}$ er lige så stor en (uendelig) mængde som $\mathbb{N}$, altså om elementerne i $\mathbb{R}$ (dvs. reelle tal) kan parres sammen en-til-en med tallene 1,2,3,4, Til Cantors forbauselse opdagede han, at *det kan man ikke* (se faktaboks).

Det er klart, at mængden $\mathbb{R}$ er mindst lige så stor som mængden $\mathbb{N}$, for ethvert positivt helt tal er jo også et reelt tal. Så Cantors opdagelse er altså, at $\mathbb{R}$ er en uendelig mængde, som er større end den uendelige mængde $\mathbb{N}$. Cantor havde dermed opdaget, at *nogle uendeligheder er større end andre*. Snart opdagede han, at der findes uendeligt mange niveauer af uendelighed, og uendeligheder, der er langt, langt større end $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$.

Fra Kontinuumshypotesen til i dag

Cantor stillede det naturlige spørgsmål, om der findes niveauer af uendelighed *mellem* $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$. Dette problem optog Cantor meget, og han formulerede i 1878 den såkaldte kontinuumhypotese. Den siger, at der findes intet niveau af uendelighed mellem niveauet af $\mathbb{N}$ og niveauet af $\mathbb{R}$.

Hilbert promoverede problemet som et af matematikkens vigtigste uløste problemer. Først i 1938 skete der for alvor fremskridt, da den østrigske logiker Kurt Gödel beviste, at på baggrund af de accepterede grundprincipper (aksiomer) for matematik *kan man ikke bevise, at Kontinuumshypotesen er falsk*.

I 1963 beviste den amerikanske matematiker Paul Cohen, at på baggrund af de accepterede grundprincipper for matematik *kan man ikke bevise, at Kontinuumshypotesen er sand*! Dette arbejde vandt Paul Cohen i 1966 matematikkens fornemste pris, Fields Medaljen, for.

Det kan virke mærkeligt, at der er noget i matematik man hverken kan bevise eller modbevise. Hvis man hverken kan bevise eller modbevise Kontinuumshypotesen, er den så sand eller falsk? Pointen er, at det er viden, vi *ikke* kan opnå på baggrund af de grundprincipper, matematikken er bygget på i dag. Det udelukker dog ikke, at der en dag vil blive fundet nye grundprincipper, som afgør spørgsmålet, og det er et forskningsområde, som særligt den amerikanske mængdeteoretiker Hugh Woodin har stået i spidsen for siden midten af 1980'erne.

Man møder en lignende situation i klassisk Euklidisk geometri. Parallelpostulatet i Euklids geometri er det, der sikrer at vinkelsummen i en trekant er 180 grader. I tusindvis af år forsøgte man at bevise Parallelpostulatet på baggrund af de *andre* postulater og aksiomer i Euklids geometri, men i begyndelsen af 1800-tallet blev det opdaget, at man hverken kan bevise eller modbevise parallelpostulatet.

Hvor har alt dette siden ført os hen? Cohens metode, som kaldes *forcing*, førte i de følgende årtier til en enorm matematisk udvikling. Det viser sig, at størrelsen af uendelige mængder er meget plastisk, og kan manipuleres ved at skifte mellem forskellige mængdeuniverser, som kaldes *modeller*. Når størrelsen på en uendelig mængde kan ændre sig fra en model til en anden, er det groft sagt, fordi en model kan have større "regne-

kraft" end en anden. Derfor er størrelsen af mængder nært forbundet til *informationsindhold* og *kompleksitet*. De amerikanske matematikere Donald Martin og Harvey Friedman lagde i 1970'erne grundstenen til en vidtrækkende teori om forbindelse mellem netop uendelighed og kompleksitet. Forbindelsen beskrives ved hjælp af spil.

Uendelige spil, selvfølgelig! ■

VIDERE LÆSNING

En fin introduktion til Hilberts hotel og anden sjov leg med uendelighed er Flemming Topsøe: *"Jessens Balsal, Hilberts Hotel -- en appetitvækker"* (i Matematiske Ideer, Matematiklærerforeningen, 1993), og i G. Gamow: *"One Two Three... Infinity"* (genoptrykt af Dover Publications, 2003).

En yderst velskrevet bog, som dog også er noget mere ambitiøs, er J. Stillwell: *"Roads to infinity"* (A.K. Peters, 2010).

En seriøs oversigt over, hvor Kontinuumshypotesen står i dag, kan findes på: plato.stanford.edu/entries/continuum-hypothesis/

En avanceret bog, der dækker store dele af den nyere udvikling som forbinder uendelighed, spil, og modeller kan findes i A. Kanamori: *"The higher infinite"*, Springer, 2003.

■ ■ ■ ■ ■