



MATEMATIKKEN BAG BEDRE FORSIKRINGER til en mere fair pris

Bag de forsikrings- og pensionsprodukter, de fleste af os kommer i kontakt med gennem livet, gemmer der sig en masse *forsikringsmatematik*. Forskningen indenfor området får nu en saltvandsindsprøjtning.

Matematikken er et universelt sprog, der kan bruges til at forbinde områder, der umiddelbart kan synes langt fra hinanden – for eksempel naturvidenskab, økonomi og jura. Et eksempel på det er forsikringsmatematik, som vi beskæftiger os med på Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet. Her har vi for nylig landet en historisk stor aftale med en række danske forsikrings- og pensionselskaber om forsikringsmatematisk forskning og uddannelse. Med dette initiativ – kaldet

InterAct – ønsker partnerne bag at skabe bedre rammer for intensiveret forskning indenfor en række områder, der præger forsikrings- og pensionsbranchens udvikling nu og i de kommende år.

Men hvilke forskningsspørgsmål dukker op? Hvorfor er det også naturvidenskab? Lad os se på et eksempel, der vedrører pension.

Rimelige forsikringspræmier
Vi ser på en 35-årig kvinde, som skal spare op til pension. Hun går på pension som 75-årig og ønsker

100.000 kr. til forbrug, når hun bliver 75, hvis hun bliver 75. Vi ønsker nu at finde en rimelig forsikringspræmie, det vil sige en pris for forsikringen, som hun skal betale i dag som 35-årig.

Lad os til en start antage, at kvinden faktisk overlever til alder 75. Da præmien skal betales i dag, mens ydelsen på 100.000 kr. først udbetales om 40 år, bør man tage hensyn til *tidsværdien* af penge, altså renten. Med en nogenlunde realistisk rente på 3,5 % vil cirka 25.000 kr. i dag blive til 100.000

Om forfatterne



Mogens Bladt er professor
bladt@math.ku.dk



Christian Furrer er
tenure-track adjunkt
furrer@math.ku.dk



Munir Hiabu er
tenure-track adjunkt
mh@math.ku.dk



Mogens Steffensen
er professor
mogens@math.ku.dk

Alle ved Institut for
Matematiske Fag,
Københavns Univer-
sitet

InterAct

InterAct står for *Interaction in Actuarial Science* og danner ramme om forskning og uddannelse indenfor forsikringsmatematik og beslægtede discipliner. InterAct er et samarbejde mellem Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet og syv af landets forsikrings- og pensionselskaber: AP Pension, Danica, Industriens Pension, PensionDanmark, Tryg, Velliv og PFA. Projektammen løber over de næste 11 år.

kr. om 40 år. Derfor er 25.000 kr. et godt bud på en rimelig forsikringspræmie.

Denne præmie tager dog ikke hensyn til, at kvindens levetid er tilfældig – eller *stokastisk*, som det hedder på fagsprog. Sagt med andre ord: vi ved ikke i dag, om kvinden faktisk overlever til alder 75. Den gren af matematikken, som beskæftiger sig med stokastiske fænomener, er sandsynlighedsregningen. Den har sine helt egne love, og på baggrund af een af dem, Store Tals Lov, kan man argumentere for, at man bør tage hensyn til kvindens tilfældige levetid ved at justere forsikringspræmien med sandsynligheden for, at kvinden overlever til alder 75. Argumentet kræver bare, at vi sælger denne kontrakt til en stor gruppe kvinder med uafhængige levetider. Med den nogenlunde realistiske vurdering, at omtrent fire ud af fem 35-årige kvinder bliver mindst 75 år, får vi så præmien $p = 4/5 \times 25.000$ kr. = 20.000 kr.

I praksis ønsker kvinden måske at spare et fast årligt beløb op, fra hun er 35 år til hun er 75 år, for at få et fast beløb til forbrug, fra hun er 75 år til hun dør. Dette kan principielt håndteres på samme måde, men regnestykket bliver blot lidt vanskeligere.

Risici og fairness

Ovenstående beregning kan oplagt problematiseres. Vi vil nu se på nogle problemstillinger, som det vil kræve forskning at finde svar på – og netop den type forskning, der sker indenfor InterAct.

Uafhængigheden mellem kvindernes levetider er en forudsætning for, at vi kan gøre brug af Store Tals Lov. Uafhængighed betyder, at hvis vi kender levetiden på een kvinde, så ændrer det *ikke* sandsynligheden for, at en anden kvinde overlever. Men det gælder faktisk ikke i virkeligheden. Der er en usikkerhed om fremtidens livsstil og medicinske fremskridt, der rammer hele gruppen af kvinder, og som faktisk gør deres levetider afhængige. Den er vi nødt til at tage hensyn til – enten ved at justere i præmien eller ved at justere i ydelsen.

Det kan gøres på forskellige måder, men det er vigtigt, at det bliver gjort på en måde, så produktet stadig opfylder det behov for pensionsopsparing, som kvinderne har. Modelleringen af fremtidens dødelighed og dens usikkerhed – og for andre forsikringer også andre risici og deres usikkerheder – er et centralt emne i forsikringsmatematikken.

Vi har i eksemplet indtil nu kun set på en gruppe kvinder. Det er sådan, at mænd i gennemsnit lever kortere end kvinder. Er det så fair, at mændene ifølge formlerne ovenfor betaler en lavere præmie end kvinderne gør? Det kommer helt an på, hvad man mener med fair. I det konkrete tilfælde findes der diskriminationslovgivning, der siger, at det er fair, at de betaler det samme. Det er relativt ligetil at rette sig efter, uanset om man er enig i konsekvenserne af den lovgivning eller ej. Men der er situationer, hvor det ikke er så enkelt.

Hvis rygere dør tidligere end ikke-rygere, og der er flere mænd end kvinder, der ryger, er det så kønsdiskriminerende, at rygere og ikke-rygere betaler forskellige præmier?

Diskriminationslovgivningen gælder alle forsikringstyper og ikke kun for køn men også for alder, etnicitet, osv. Så der er rigeligt med dilemmaer. Som forsikringsmatematikere jagter vi de grundlæggende principper, der på den ene side fungerer indenfor lovgivningen og lever op til forsikringselskabets etiske krav, men på den anden side også giver anledning til præmier, der kan beregnes rent teknisk og ikke fører til, at kunderne kan spekulere mod forsikringselskabet.

Design af forsikringsprodukter

På grund af inflation kan den 35-årige kvinde være bekymret for, hvad hun kan få for 100.000 kr. om 40 år. Det er ikke væsentligt for kvinden at have netop 100.000 kr. om 40 år men derimod at have mulighed for at købe de ting, hun har brug for. Derfor ændrer vi kontrakten, så kvinden får værdien af en Mærsk-aktie udbetalt om 40 år. Den bagvedliggende idé er, at der nok må være en sammenhæng mellem Mærsk-aktieprisens udvikling og prisudviklingen på de varer, kvinden gerne vil købe. Hvad er nu en rimelig præmie?

Udgangspunktet er her, at vi kender aktieprisen i dag, men ikke om 40 år, så aktieprisen om 40 år er derfor stokastisk. Vi argumenterer nu for, at en rimelig præmie er lig med aktieprisen i dag ganget med $4/5$. Faktoren $4/5$ er igen en konsekvens af, at omtrent fire ud af fem 35-årige kvinder bliver mindst 75 år – men hvorfor skal aktieprisen i dag indgå i præmien? Ideen er at købe Mærsk-aktier for præmien i stedet for at forrente den med 3,5 %. Disse aktier købes til prisen i dag, og efter 40 år sælges de til den værdi, som kvinden skal have, hvis hun overlever. Derfor passer pengene.

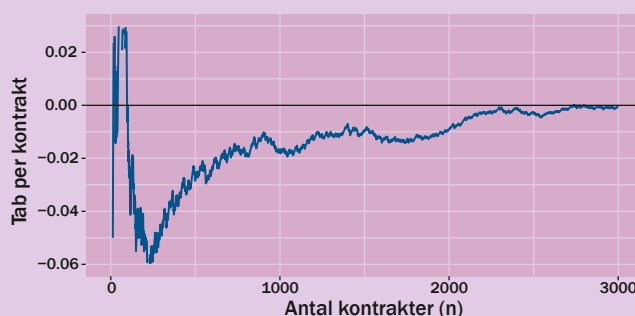
Kvinden har en kontrakt, der udbetaler et bestemt beløb, hvis hun bliver 75 år, nemlig Mærsk-aktieprisen. Dette beløb kan hun så tære på, indtil hun dør. Skulle hun dog dø kort efter, hun blev 75 år, står der en masse penge tilbage. Skulle hun omvendt dø længe efter, har hun måske haft et for højt forbrug indledningsvist. Derfor findes der et bedre produkt, der udbetaler en fast ydelse hver måned til kvinden, indtil hun dør. Men blandt andet fordi der også er inflation i løbet af kvindens tid som pensionist, skal hun måske hellere have nogle ydelser, der også delvist afhænger af Mærsk-aktiens udvikling i den periode. Men hvordan?

Kan hun for eksempel leve med at hendes ydelser følger aktieprisen udsving? Eller vil hun hellere udglatte disse bevægelser over en længere årrække? Hvad foretrækker kvinden helt fundamentalt i forhold til usikkerhed og udsving i forbrug over tid, og hvordan skal vi derfor designe og kommunikere produktet, så hun værdsætter den balance mellem stabilitet og sikring af købekraften, som hun får?

Nye tider – nye metoder

Ovenstående emner rummer principielle spørgsmål af både økonomisk og juridisk karakter, så hvorfor er alt dette også *aktuel naturvidenskab* og ikke *bare økonomi* og *jura*? Det er det, fordi svarene trækker på avancerede matematiske, sandsynlighedsteoretiske, statistiske og datalogiske metoder. Ofte skal disse metoder udvikles målrettet for at hjælpe med at besvare spørgsmålene. InterAct rummer også emner, der handler mere direkte om udvikling og anvendelse af metoder møntet på de forsikringsmatematiske problemer, herunder brug af maskinlæring. Endelig kan nye typer af risici føre til nye produkter, som kræver udvikling af helt nye metoder, fordi hidtidige metoder er utilstrækkelige. I disse år betegnes for eksempel risici forbundet med klimaforandringer, pandemier og brugen af informationssystemer som “nye risici”. ■

Pension og Store Tals Lov



Store Tals Lov i aktion: Tabet per kontrakt nærmer sig nul i takt med, at antallet af kontrakter forøges.

I det følgende giver vi en mere matematisk og formalistisk fremstilling af eksemplet gennemgået i artiklen for at belyse samspillet med Store Tals Lov. Vi dropper enheden *hundredetusinder kr.*, sådan at den ydelse, kvinden ønsker, er 1. Den stokastiske variabel T beskriver hendes alder ved dødsfald. Vi formaliserer ydelsen som en ny stokastisk variabel, der er en funktion af T , en såkaldt indikatorfunktion. Vi skriver ydelsen som

$$1_{(T>75)} = \begin{cases} 1 & T > 75, \\ 0 & T \leq 75, \end{cases}$$

der netop er 1, hvis kvinden overlever til alder 75, mens den er 0, hvis kvinden ikke overlever til alder 75. Vi foreslår præmien

$$p = \frac{1}{(1+r)^{40}} \times P(T > 75),$$

hvor $P(T > 75)$ er sandsynligheden for overlevelse til alder 75, mens den første faktor er en diskonteringsfaktor, der med renten r regner værdien af 1 betalt 40 år senere. Hvorfor er dette en rimelig præmie?

Pensionselskabet sælger en sådan kontrakt til et stort antal, n , 35-årige kvinder, hvis levetider er uafhængige. Vi kan nu beregne selskabets samlede tab per kontrakt efter 40 år. Selskabet har fået præmien p fra n kvinder, da de var 35 år. Disse penge har de forrentet med renten r i 40 år, og de har altså et indestående på

$$n \times p \times (1+r)^{40} = n \cdot P(T > 75).$$

Modsat skal selskabet udbetale 1 til alle kvinder, der fortsat er i live. Vi tæller antallet via summen

$$\sum_{i=1}^n 1_{(T_i>75)},$$

hvor T_i er levetiden for den i 'te kvinde. Dermed bliver tabet (udgifter fratrukket indtægter) per kontrakt

$$\frac{\sum_{i=1}^n 1_{(T_i>75)}}{n} - P(T > 75). \quad (1)$$

Her begynder det at ligne noget bekendt for alle, der har kastet terninger og mønter og i den forbindelse studeret “antal gunstige udfald” delt med “antal mulige udfald”. Første led er netop sådan en brøk. Hver overlevende kvinde er et gunstigt udfald (ikke bare for kvinden personligt, men altså også teknisk set i vores “forsøg”) og n er antallet af mulige overlevende kvinder. Ifølge Store Tals Lov nærmer sådan en brøk sig sandsynligheden for et gunstigt udfald, som netop er $P(T > 75)$. Det betyder, at udgifter og indtægter automatisk kommer i balance i takt med, at selskabet sælger flere og flere kontrakter. Dette er illustreret i figuren, hvor vi har simuleret en række udfald og beregnet differencen fra (1).