

Supplerende materiale til artiklen [Notation og repræsentationers betydning for matematik](#) af Jessica Carter, SDU. Aktuell Naturvidenskab nr. 5-2020.

## Udsagnslogik

### - styrker og svagheder ved forskellige systemer af notation

*Der findes i matematikken flere eksempler på, at der er forskellige systemer af notation for det samme matematiske område. For eksempel har man igennem historien benyttet et utal af symbolsystemer for tallene (blandt andet det romerske additive talsystem, som de fleste er stødt på). Ofte har hver af disse systemer forskellige fordele. Her vil jeg illustrere denne pointe med et eksempel om logik.*

Af Jessica Carter, Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet.

Igennem historien har man udviklet mange forskellige logiske systemer med tilhørende notation. Den formelle logik, herunder udsagnslogik, blev udviklet fra omkring midten af 1800-tallet i forbindelse med at matematikere og filosoffer søgte et mere præcist grundlag for matematikken. I løbet af denne udvikling har man opfundet flere forskellige typer af notation. Vi skal her se på to af disse: den traditionelle lineære form, som benyttes i dag, og en diagrammatisk form udviklet af den amerikanske logiker Charles Sanders Peirce.

I logik forsøger man at indfange og analysere evnen til at ræsonnere, eller hvordan man kan drage logisk gyldige slutninger. Når man betragter udsagn i logik, er man kun interesseret i deres *logiske form* og ikke i deres betydning udover denne. For at illustrere dette kan vi betragte udsagnet "enten regner det eller også regner det ikke". Et andet udsagn, som har samme form som dette, er "enten er himlen blå eller også er den ikke blå". Vi kan derfor erstatte udsagnet "det regner" med et bogstav "R" og skrive udsagnet som "R eller ikke R" og konstatere, at det også har samme form som det andet. I udsagnslogik er de grundlæggende komponenter udsagn og forskellige "logiske operatorer". Et udsagn er et udtryk, som kan tillægges en bestemt sandhedsværdi – enten sand eller falsk. Endvidere er forudsætningen, at vi kun interesserer os for sandhedsværdien af udsagnene og ikke deres betydning. De logiske operatorer i udsagnslogik er blandt andet "ikke" betegnet med  $\neg$  og "eller" betegnet med  $\vee$ . Ved hjælp af disse tegn, kan vi skrive ovenstående udsagn som  $R \vee (\neg R)$ .

Når man skal beskæftige sig med et bestemt logisk system i formel logik, introduceres det oftest i forskellige trin eller niveauer – lidt på samme måde som når man præsenterer et sprog: I første niveau har man et alfabet af bogstaver. I næste trin sammensættes disse til ord og derefter er der grammatiske regler for hvordan ord kan sammensættes til sætninger. Derudover kan man tale om betydningen af ord og sætninger. Jeg introducerer først de forskellige symboler, der benyttes i udsagnslogik. Og derefter hvordan de kan sammensættes.

Traditionel udsagnslogik har følgende grundlæggende symboler. Ordene i parentes angiver de logiske operators dagligdags betydning:

1. Udsagnsvariable, fx betegnet ved bogstaverne  $p, q, r, \dots$
2. Logiske operatorer, oftest  $\wedge$  (og),  $\vee$  (eller),  $\rightarrow$  (medfører),  $\neg$  (ikke),  $\leftrightarrow$  (biimplikation)

Disse kan sammensættes til *logiske udtryk* efter følgende regler:

a)  $p, q, r, \dots$  er logiske udtryk,

b) Hvis A og B er logiske udtryk, er følgende også logiske udtryk:

$$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, \neg A, A \leftrightarrow B$$

b) Reglerne a og b er eneste regler, der kan benyttes til at sammensætte udtryk. (Det betyder, at man fx ikke må skrive  $\neg B \rightarrow$  eller  $\neg A \neg B$ )

Man definerer betydningen af sammensatte logiske udtryk ved hjælp af deres sandhedsbetingelser. Disse kan vises i sandhedstabeller. 'Ikke P' defineres til at have modsat sandhedsværdi af P, som vist i tabel 1:

**Ikke P:**

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| S   | F        |
| F   | S        |

De øvrige operatorer, svarende til 'eller', 'og', 'medfører' og 'biimplikation' ses i følgende tabel:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|------------|--------------|-------------------|-----------------------|
| S   | S   | S          | S            | S                 | S                     |
| S   | F   | S          | F            | F                 | F                     |
| F   | S   | S          | F            | S                 | S                     |
| F   | F   | F          | F            | S                 | S                     |

Heraf ses, at fx udsagnet " $P \wedge Q$ " kun er sandt, hvis både P og Q antager værdien sand.

Med disse definitioner kan vi undersøge sandhedsbetingelserne for alle sammensatte udsagn. For eksempel udsagnet  $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ , hvor det ses, at denne antager værdien sand uanset hvilke sandhedsværdier P og Q har. Udsagnet er derfor det man kalder et logisk gyldigt udsagn.

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|-----------------------------------------------------|
| S   | S   | F        | S               | S                 | S                                                   |
| S   | F   | F        | F               | F                 | S                                                   |
| F   | S   | S        | S               | S                 | S                                                   |
| F   | F   | S        | S               | S                 | S                                                   |

Et spørgsmål, man interesserer sig for i logik, er, hvornår to udsagn er logisk ækvivalente, eller har samme logiske betydning. Når man beviser sætninger i matematik, baserer forskellige bevisstrategier sig på, at forskellige udsagn er logisk ækvivalente. Et simpelt eksempel er, at udsagnene "det er ikke tilfældet, at fire ikke er et lige tal" og udsagnet "fire er et lige tal" er logisk ækvivalente. Disse udsagn kan også skrives som " $(\neg(\neg L))$ " og " $L$ ". Når jeg påstår, at de er logisk ækvivalente, betyder det, at de altid vil have samme sandhedsværdi. Med andre ord, så vil " $(\neg(\neg L))$ " netop være sand, når " $L$ " er sand. Andre ækvivalente udsagn er " $(P \text{ medfører } Q)$ " og " $(\text{ikke } P \text{ eller } Q)$ ". Vi så netop, at udsagnet  $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$  altid antager værdien sand. Det er ensbetydende med, at udsagnene  $(\neg P \vee Q)$  og  $(P \rightarrow Q)$  er logisk ækvivalente.

Man kan således i dette lineære system afgøre, om to udsagn er ækvivalente ved at benytte sandhedstabeller. Jeg vil nu introducere Peirces notation og vise, at den giver en mere direkte adgang til logisk ækvivalente formuleringer.

De grundlæggende byggestene i Peirces system er også udsagn og logiske operatorer. Udsagn kan som før betegnes med bogstaver, men der er kun to grundlæggende logiske operatorer. Den ene har betydningen "og", men der er ikke noget synligt tegn, der svarer til denne operation. Reglen i dette system er, at når man skriver to udsagn, fx F og H, ved siden af hinanden, så svarer det til, at man hævder begge to, dvs. svarende til "F og H". Peirce brugte lang tid på at udvikle dette system, som han i øvrigt kaldte Eksistentielle Grafer. Intentionen var, at det skulle være så indlysende og transparent som muligt. Ideen med, at der ikke benyttes et tegn til at vise "og" er muligvis, at det er overflødigt: Når jeg ser ud i haven og får øje på en fugl i træet med hvide blomster, så ser jeg fuglen i træet, og at træet har hvide blomster. Men jeg ser ikke noget "og". Med andre ord svarer det til

Der er en fugl i træet      Træet har hvide blomster

Det er netop sådan, Peirce repræsenterede det samlede udsagn i sit system (på det han kalder et ark af udsagn). Hvis vi betegner "Der er en fugl i træet" med F og "Træet har hvide blomster" med H, kan vi skrive det lidt kortere som

F    H

For Peirce har det ingen betydning, hvor udsagnene er placeret – og dermed i hvilken rækkefølge de læses. Jeg kunne også have skrevet ovenstående som

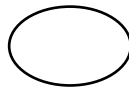
H  
F

og læse det som "H og F". Det afspejler samtidig at de to udsagn er logisk ækvivalente: Det har ingen betydning for sandhedsværdien af udsagnet om jeg siger 'F og H' eller 'H og F'.

Det andet logiske tegn svarer til negation. Han viser negationen af et udsagn ved at tegne en sluttet ring udenom udsagnet. Hans intuition med valget af denne notation er muligvis, at udsagnet, når det benægtes, klippes ud. En ring tegnet rundt om "F" vil således betegne "ikke F" eller "Der er ikke en fugl i træet".

Ligesom vi gjorde i den lineære notation, kan man introducere Peirces system mere formelt. De grundlæggende symboler for hans Eksistentielle grafer er følgende:

1. Udsagn som her betegnes ved store bogstaver, P, Q, R, S, ...
2. Et klip (et "cut") som vises ved:



Disse symboler sammensættes til udtryk og læses som angivet her:

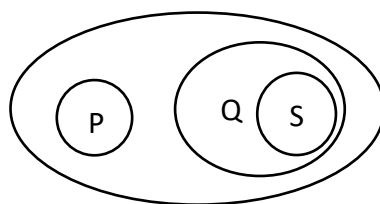
1. En sammenkædning af udsagn læses ved at sætte 'og' imellem dem, dvs. P Q læses som 'P og Q'
2. Et klip udenom et udsagn læses ved at sætte 'ikke' foran udsagnet.

Nogle eksempler på udsagn er:



Disse læses som henholdsvis 'P og Q', 'ikke P', 'ikke (P og Q)', 'ikke (P og ikke Q)' og 'ikke (ikke P og ikke Q)'.

En fordel ved disse grafer, er at de kan læses på flere måder. En simpel observation, jeg gjorde ovenfor, er, at rækkefølgen man læser sammensatte udsagn på, er ligegyldig. Forskellig læsning af samme graf giver anledning til logisk ækvivalente udtryk. For at opnå flere logisk ækvivalente udsagn, introduceres forskellige læsestrategier. Udsagnet "ikke (P og ikke Q)" er logisk ækvivalent til "P medfører Q". Det betyder at den fjerde graf i figuren ovenfor kan læses som "P medfører Q". Tilsvarende læses den sidste graf også som "P eller Q", da dette udsagn er ækvivalent til "ikke (ikke P og ikke Q)". Betragt nu grafen:



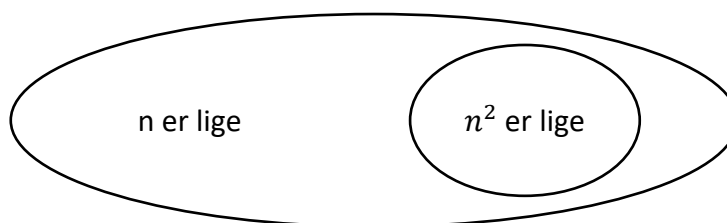
Med de nye læsestrategier kan denne graf læses på følgende måder:

1. Vi benytter de grundlæggende logiske operatorer 'og' og 'ikke' (hvor der læses udefra og ind):  
 $\neg(\neg P \wedge \neg(Q \wedge \neg S))$
2. Vi benytter læsning af 'eller':  $P \vee (Q \wedge \neg S)$
3. Vi benytter læsning af 'medfører' fra venstre:  $\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg S)$
4. Vi benytter læsning af 'medfører' fra højre:  $\neg(Q \wedge \neg S) \rightarrow P$

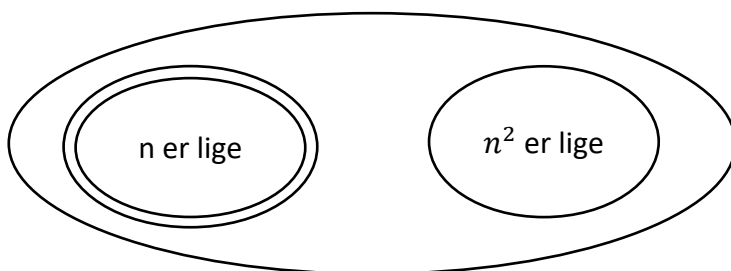
Da de aflæses af en og samme graf, er alle disse udtryk logisk ækvivalente. En ofte benyttet logisk ækvivalens i bevisførelse anes desuden af de to sidste: at  $P \rightarrow Q$  er ækvivalent med  $\neg Q \rightarrow \neg P$

Man kan derfor direkte aflæse, at forskellige udsagn er logisk ækvivalente ved hjælp af de eksistentielle grafer. En anden fordel er, at man kan indføre regler for, hvordan man kan udlede sætninger i form af manipulation af grafer – ligesom man manipulerer symboler i fx ligningsløsning. I systemet vil en slutningsregel svare til at man kan tilføje eller fjerne bestemte elementer (udsagn eller klip) i en graf. Som illustration, viser jeg hvordan man udleder sætningen:  $n^2$  er ulige medfører at  $n$  er ulige. Det er netop eksempler som dette Peirce hentyder til, når han hævder at hans system skal være transparent – at det er muligt at visuelt at vise udledninger.

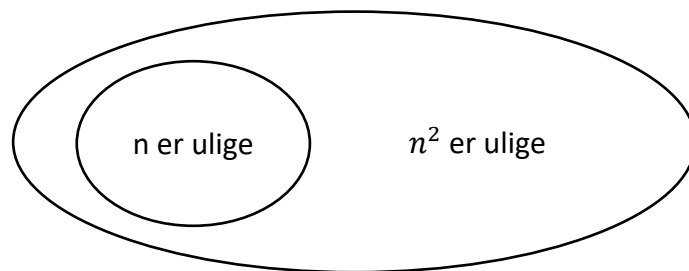
Jeg tager udgangspunkt i, at vi antager at følgende sætning gælder:  $n$  er lige, medfører at  $n^2$  er lige. Dette udsagn repræsenteres som følger:



Et slutningsregel, som må benyttes i logisk udledning i Peirces system, er, at det er tilladt enten at tilføje eller fjerne et dobbeltklip om et vilkårligt udsagn. Det svarer til, at 'ikke (ikke F)' er logisk ækvivalent med 'F'. I vores graf kan udsagnet ' $n$  er lige' omslutes af et dobbeltklip.



Udsagnene erstattes nu med negationen af dem, hvilket betyder, at det ene af klippene udenom fjernes:



Den sidste graf kan netop læses som ' $n^2$  er ulige medfører n er ulige'.

Med disse fordele kan man måske undre sig over, hvorfor vi ikke i højere grad benytter Peirces diagrammatiske system som notation for logik i dag. Der er flere historiske grunde. Jeg vil nævne to praktiske. For det første er udsagn besværlige at gengive i denne diagrammatiske form i de fleste tekstbehandlingsprogrammer. Udsagn formuleret i det traditionelle lineære system følger den lineære form, som tekst normalt sættes op i, og er formentlig også nemmere at læse, når man først har vænnet sig til de logiske tegnsymboler, som for eksempel "eller" og "ikke". For det andet har den sædvanlige notation for udsagnslogik andre fordele, som jeg slet ikke er kommet ind på her. Det har fordele, når man skal vise sætninger *om* systemet. For eksempel at systemet er modsigelsesfrit og fuldstændigt, som er ønskværdige egenskaber ved et logisk system.