

MATEMATIKKEN I AKUSTIKKEN

At Peter Møller Juhl i dag forsker i akustik er en tilfældighed, men måske alligevel en naturlig konsekvens af en livslang interesse for matematik. Han giver her en personlig beretning om sin vej ind i dette fascinerende fagområde.

Om forfatteren



Peter Møller Juhl er lektor på SDU, specialist i akustik og særligt matematisk og numerisk beregning af akustiske problemstillinger. pmjuhl@mmpi.sdu.dk

Det var dengang, der var stille på biblioteket – især i voksenafdelingen. Nok også lidt fordi, der sjældent var voksne på det tidspunkt, hvor jeg efter skoletid gik ned langs reolerne. Det var ikke en målrettet søgning, men af en eller anden grund blev jeg interesseret i en bog, der handlede om atomets “opdagelse”. Jeg kan ikke huske bogens titel og forfatter, men jeg husker, hvordan bogen beskrev etableringen af Bohrs atommodel som en opdagelsesrejse – hvordan det ukendte trinvist var blevet udforsket og beskrevet af Thompson og Rutherford, før Niels Bohr endelig “nailede” problemet med sin atommodel. Den bog kom til at præge mine valg langt frem i tiden, for jeg viste dermed allerede i sjette klasse, at hvis jeg kunne, så ville jeg på universitetet og gå forskervejen.

Jeg har altid interesseret mig for matematik og fysik. Matematik i folkeskolen og gymnasiet var for mig velkomne udfordringer – tankepuslespil. Jeg følte en enorm tilfredsstillelse, hvis jeg efter timers forgæves forsøg endeligt lykkedes med at løse en vanskelig opgave. Jeg spurgte ikke mig selv eller andre, hvad det kunne bruges til. Det var udfordringen i sig selv, der tændte mig. Fysikken var også interessant, det var jo den, der havde startet det hele.

Fysikken tilførte matematikken et ekstra lag: Man skulle ikke bare løse en given matematisk opgave – man skulle selv formulere opgaven matematisk ud fra nogle fysiske love; og det var ikke altid givet, hvilke love der mest succesfuldt kunne bringes i anvendelse.

På shoppetur i kursuskataloget

Jeg startede på DTU (eller Danmarks tekniske Højskole, DTH, som det hed dengang) med intentionen om at læse atomfysik. Men det blev hurtigt klart, at der ikke skete meget på den front på DTU – måske fordi det var rimeligt klart, at Danmark ikke ville komme til at få fissionskraftværker. Jeg shoppede rundt i de mange tilbud, der var i kursuskataloget, og jeg havde stadig en stor interesse i matematik. Da det samtidig var i de år kaos-teorierne var populære (det med, at vingeslag fra en sommerfugl på den ene side af Jorden kan forårsage en orkan på den anden side) fik jeg taget mig nogle ekstra matematikkurser – bl.a. ulineære differentia ligninger, der pludselig efter en hensygnende tilværelse fik et pænt antal studerende.

Som flere andre (om end langt fra flertallet), der gik i gymnasiet interesserede jeg mig også for computere og især programmering, og efter omkring fire år på DTU havde

jeg en stærk profil i matematik og numerisk analyse, men ingen egentlig faglig profil i traditionel forstand. Jeg besluttede mig for, at jeg gerne ville arbejde med numerisk løsning af fysiske problemer, men med et udgangspunkt fra anvendelserne. Da jeg kun havde 3-4 semestre tilbage i studiet, var det nødvendigt at finde et fagområde med relativt kort vej fra indledende kurser til specialisering. Et sådant fagområde var akustik.

Akustik alle vegne

Det er med andre ord lidt en tilfældighed, jeg endte som akustiker. Men jeg har aldrig fortrudt, fordi akustik som fag bygger solidt på fysik og arbejdet med akustik bygger på matematiske modeller af denne fysik. Samtidig viste det sig, at akustikere har en meget bred kontakthorisont. Der er akustik nærmest alle steder, og man arbejder med mange andre faggrupper: arkitekter, musikere, læger, biologer, fysikere – og selvfølgelig andre ingeniører. Med min interesse for matematik, numeriske metoder og akustik var det naturligt at specialisere sig i numerisk akustik, altså computermødeløsning af akustiske problemer.

Akustik er et modent fagområde: Den elektrodynamiske højttaler, som vi kender den i dag, har lige haft 100 års fødselsdag, og vi har

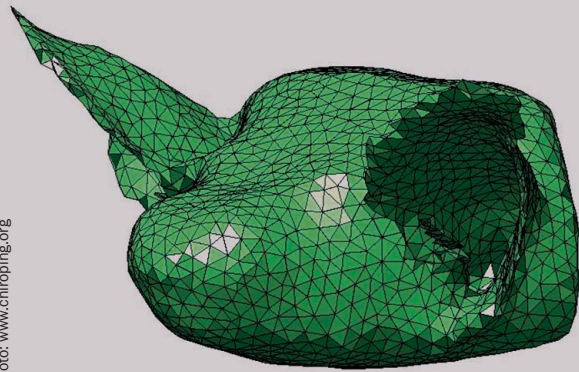


Foto: Shutterstock

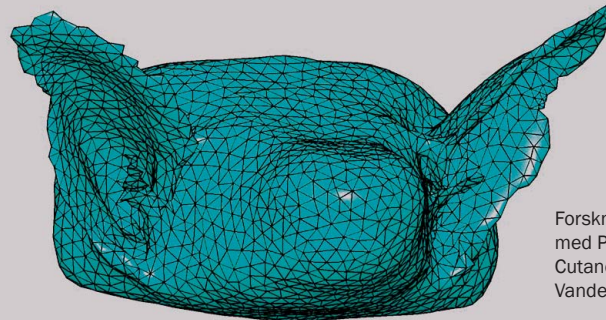
Flagermusens fantastiske hørelse



Foto: www.chiroptera.org

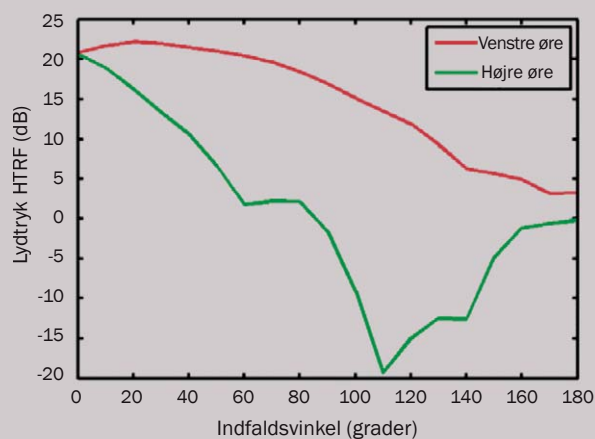


Geometrien af ørerne på flagermus, her arten *Myotis Daubentonii*, er stærkt medvirkende til dyrets evne til at navigere ved hjælp af ekkolokalisering. Figuren viser geometrien, som er inddata til en computerberegningsmodel af flagermusens hoved og ydre øre, der bruges til at vurdere hvilke geometriske egenskaber, der er vigtige for flagermusens fantastiske hørelse. Denne viden kan fx bruges til at lave robotter, der i mørke kan navigere nøjagtigt.



Forskning i samarbejde med Peter M. Juhl, Vicente Cutanda Henríquez og D. Vanderelst.

Den såkaldte Boundary Element-metode er meget velegnet til at modellere geometriens indflydelse på lydfeltet, og figuren nedenfor viser lydtrykket på flagermusens "trommehinder" for henholdsvis højre og venstre øre, når flagermusen udsættes for en lydbølge. Figuren svarer til en frekvens på 40.000 Hz, hvilket er ca. midt i det hørbare område for denne flagermus, og figurens horisontale akse angiver indfaldsvinklen, således at 0 grader svarer til frontalt lydindfald, mens 90 grader svarer til en lyd, der



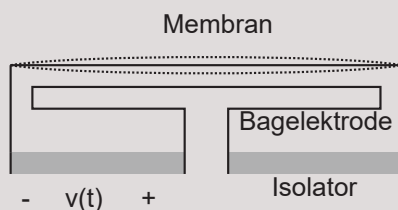
kommer fra flagermusens venstre side.

Figuren viser dels, at ørets geometri forstærker lyden 20 dB (10 gange) for frontalt indfald ved denne

frekvens, og dels at der ved ret små vinkler opstår betydelig forskel mellem lydtrykket ved de to ører, hvilket bl.a. er baggrunden for flagermusens fantastiske evne til at navigere ved hjælp af hørelsen.

Mikrofonens matematik

Mange akustiske problemer kan beskrives ved hjælp af Helmholtz ligning, der er en andenordens partiel differentilligning i lydtrykket. Lydtrykket er i disse modeller et rotationsfrit skalarfelt. Imidlertid er det ved design af små akustiske transducere som mikrofoner i nogle situationer nødvendigt at medtage viskøse og termiske tab. Det kan løses ved hjælp af Navier-Stokes ligninger, der ved linearisering kan omskrives til 3. ordenens differentiailligninger: to rotationsfrie skalarfelter og et gradientfrit tre-dimensionelt vektorfelt. Disse felter kan kobles ved beregningsdomænets grænser ved at forlange kontinuitet i lydtryk, temperatur og partikelhastighed. De viskøse og termiske tab foregår i tynde grænse lag på typisk mellem 10 og 100 mikrometer, og nøjagtig numerisk modellering er

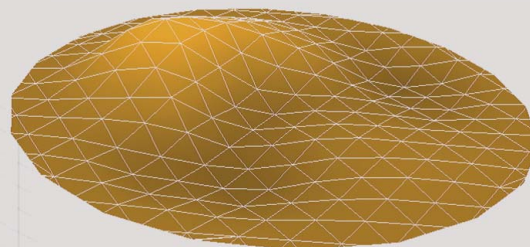
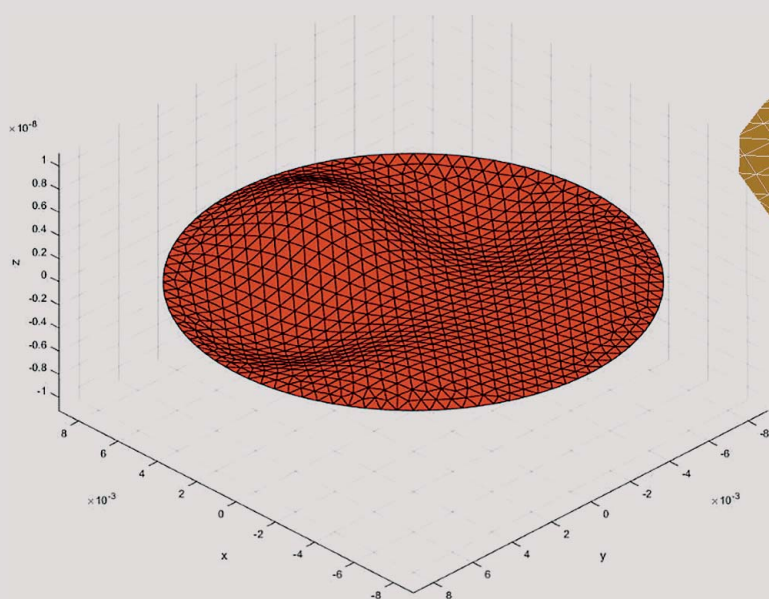


meget vanskelig. Brugbare numeriske løsningsmetoder er først blevet udviklet de senere år.

Figuren øverst i boksen viser et tværsnit gennem en målemikrofon af kondensatortypen. En kondensatormikrofon omsætter et akustisk tryk på en membran til et elektrisk signal ved at lade membranen udgøre den ene "plade" i en kondensator. Den anden plade udgøres af en "bagelektrode". Når kondensatoren er "ladet op" til en

konstant ladning på pladerne, vil spændingen over kondensatorens plader være proportional med afstanden mellem dem. Når et lydfelt påvirker den ene plade (membranen) med en kraft, vil afstanden mellem pladerne ændres i takt med lydtrykket, og dermed vil spændingen over pladerne variere proportionalt med det øjeblikkelige lydtryk. Afstanden mellem membranen og bagelektroden i en mikrofon er ganske lille – omkring 20 mikrometer – og de viskøse og termiske grænse lag er vigtige for mikrofonens egenskaber.

Nøjagtig modellering af mikrofoner er vigtig for at kunne designe mikrofoner med bestemte og veldefinerede egenskaber – både til målebrug, til høreapparater og til konsumbrug – fx mobiltelefoner.



Figuren til venstre viser en nøjagtig simulering af membranens bevægelse for en målemikrofon (Brüel og Kjær type 4160) ved 20 kHz og lydindfald i en vinkel på 45 grader fra membranens normal. Til højre er tilsvarende målinger foretaget ved hjælp af et laservibrometer.

Forskning i samarbejde med Vicente Cutanda Henriquez (DTU), Salvador Barrera-Figuero & Antoni Torras-Rosell (DFM A/S) og Peter M. Juhl (SDU).

i Danmark forsket seriøst i akustik næsten lige så længe. Det betyder ikke, at fagområdet står stille: Tværtimod er der et tæt samspil og parløb mellem akustisk forskning og teknologiske landvindinger, hvor nye teknologier betyder, at kendte teorier og metoder pludselig får fornyet relevans og blomstrer op, eller hvor akustik kombineres med nye teknologier og åbner helt nye mulig-

heder. Et eksempel er overgangen fra analoge til digitale høreapparater i 80'erne. Her betød digitalteknologien og digital signalbehandling en voldsom udvikling af et kendt produkt, høreapparatet, og muliggjorde skabelsen af nutidens apparater, der er langt mere fleksible og nyttige for brugeren. Et moderne høreapparat har en processorkraft svarende til 70'ernes supercompu-

tere, men drives alligevel af et lille knapbatteri.

At høre matematikken

En særlig udfordring inden for det akustiske fagområde er, at det relevante frekvensområde, menneskets hørelse, i runde tal strækker sig over tre dekader fra 20 Hz til 20.000 Hz og de tilsvarende bølgelængder mindsker fra 17 meter

Lyd og hørelsen

Lyd i luft er svingninger af luftens molekyler fra deres ligevægtstilstand. Ved frekvensen 1000 Hz er menneskets høretærskel på 0 decibel svarende til et lydtryk på 0,00002 Pa (Pascal). Ved denne amplitude er molekylernes udsvingsamplitude omkring 8 picometer (en picometer = 10^{-12} meter), hvilket omtrent er en tiendedel af diameteren af et hydrogenatom. Det er med andre ord fantastisk små svingninger, vi er i stand til at høre. Høretærsklen er en gennemsnitsværdi, og nogle mennesker kan – ligesom dyr – høre endnu svagere lyde: altså negative dB-værdier. En nedre grænse for lyd kan angives ud fra de Brownske bevægelser, der ved stuetemperatur svarer til et lydtryk på omkring -23 dB. Vi kan således høre bevægelser, der kun er omkring 10 gange større end de Brownske bevægelser.

Omvendt er vi i stand til at håndtere meget kraftige lyde: Den øvre grænse (smertegrænsen) ligger på omkring 120 dB, hvilket er en million gange kraftigere end høretærsklen. Dette meget store dynamikområde svarer til, at vi fra samme afstand kan overskue hele Mount Everest og se øjet på en bjergbestiger, der står midt på bjerget!

Menneskets dynamikområde i frekvens er også meget stort, idet hørelsen strækker sig over 3 dekader, fra 20 Hz til 20.000 Hz. Til sammenligning dækker synssansen kun omkring en halv dekade i fre-

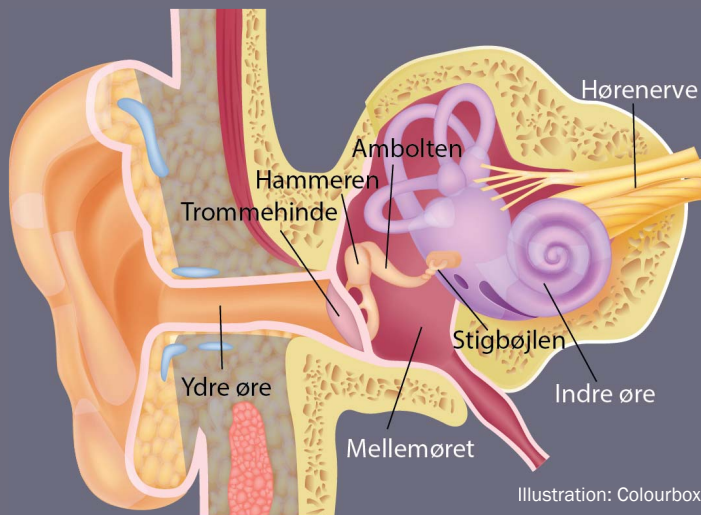
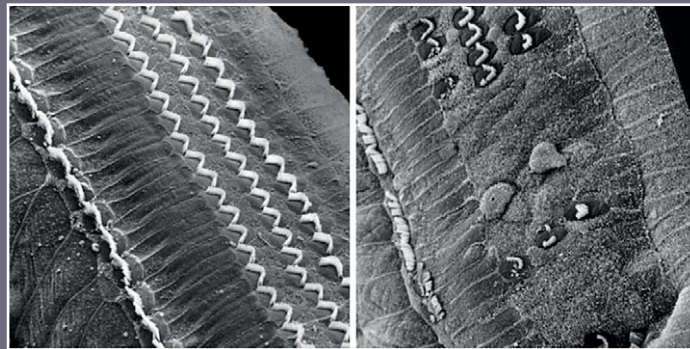


Illustration: Colourbox



Intakte hårceller

Ødelagte hårceller

kvens svarende til bølglængder fra 380 til 750 nanometer.

Figuren øverst viser et tværsnit gennem et øre, hvor trommehinden er forbundet til det indre øre gennem tre knogler i mellemøret: Hammeren, Ambolten og Stigbøjlen. Knoglerne i mellemøret er kroppens mindste og sørger for at forstærke transmissionen fra luften til det væskefyldte indre øre.

I det indre øre sætter vibrationer

i væsken små hår i bevægelse, hvilket får de tilsvarende hårceller i øret til at sende elektriske impulser gennem hørenerven. En for voldsom lyd kan ødelægge hårcellerne med et høretab til følge. Den anden figur viser intakte og ødelagte hårceller. Hårcellernes position i det indre øre svarer til bestemte frekvensområder, således at en skade på en bestemt position i det indre øre svarer til et høretab i et bestemt frekvensområde.

til 17 millimeter. Dette meget store spænd i bølglængde og dermed størrelsesforhold betyder, at det samme problem ofte skal behandles med vidt forskellige teorier og metoder, før man har dækket hele frekvensområdet. Der er endnu ingen universelle metoder, der kan "klare det hele", og det kræver stor viden og erfaring at vurdere, hvilke metoder og teorier der bedst muligt

beskriver en given problemstilling i det ønskede frekvensområde.

Det, der i særlig grad begejstrer mig ved akustik, er samspillet mellem den oplevede virkelighed, den fysiske model og den matematiske formulering. Inden for akustikken kan man ofte direkte "høre matematikken" – altså med en af sine primære sanser, hørelsen, opleve

hvad formlerne betyder og hvordan lyden ændrer sig i sammenhæng med en parameter i den matematiske beskrivelse. Jeg synes det er enormt inspirerende at arbejde inden for et område, hvor matematikken og fysikken bliver "levende" og håndgribeligt bliver brugt til fx at skabe bedre dæmpning af støjen fra motorveje eller bedre høreapparater for hørehæmmede. ■

Videre læsning:

Bog: F. Jacobsen & P.M. Juhl: Fundamentals of General Linear Acoustics. Wiley 2013.
EU-projektet om flagermus og deres brug af sonar: ChiRoPing: www.chiroping.org