Ekstramateriale til artikel i Aktuel Naturvidenskab nr. 4 2018:
Fysikernes hemmelige våben

Fem eksempler på dimensionsanalyse

Forfattet af:
Jens Højgaard Jensen & Tina Hecksher

IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø
Roskilde Universitet

Indhold

Eksempel 1: Pendul og satellit

Vi vil finde formler for svingningstiden for et pendul og omløbstiden for en lavt hængende satellit ved hjælp af dimensionsanalyse.

Lad os først finde en formel for svingningstiden for et pendul. Et simpelt pendul er en svingende sten bundet til en snor, der er fixeret i dens anden ende. Hvad afhænger svingningstiden af? Længden af pendulsnoren, l, må spille en rolle. Erfaringer med for eksempel pendul-ure er, at svingningstiden vokser med længden af deres pendulstænger. Tyngdefeltstyrken ("tyngdeaccelerationen"), g, på Jordens overflade må også være medbestemmende for svingningstiden. På Månen forventer vi for eksempel, at et givet pendul vil have en anden svingningstid end på Jorden. Måske afhænger svingningstiden også af pendulstenens masse, m?

Da indbyrdes additioner og subtraktioner af l, g og m ikke giver mening på grund af deres forskellige dimensioner, som er L, LT^{-2} og M, forsøger vi os med

$$\tau = \text{tal} \times l^\alpha g^\beta m^\gamma \,, \tag{1}$$

som formel for svingningstiden τ, hvor α, β og γ i første omgang er ubekendte. I anden omgang må vi imidlertid kræve, at de to sider af ligning (1) har samme dimension. Og det ses de kun at have, hvis

$$T = L^\alpha (LT^{-2})^\beta M^\gamma = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} M^\gamma \,. \tag{2}$$

Da basisdimensionerne L, T og M per definition ikke kan reduceres til hinanden, skal potenserne i ligning (2) være de samme på hver side af ligningen for hver basisdimension for sig. Det betyder, at de tre ubekendte α, β og γ skal være løsning til de tre ligninger:

$$L: \qquad 0 = \alpha + \beta \tag{3}$$
$$T: \qquad 1 = -2\beta \tag{4}$$
$$M: \qquad 0 = \gamma \,, \tag{5}$$

idet vi på venstre side af ligning 2 i stedet for T kunne skrive $L^0T^1M^0$, og en dimension opløftet til potensen 0 regnes for det dimensionsløse tal 1.

Ligning (5), $\gamma = 0$, viser, at svingningstiden, ifølge ligning (1), ikke afhænger af m. Vi havde altså ikke behøvet medtage stenens masse som styrende parameter i starten af vores dimensionsanalyse. På den anden side er uafhængigheden af pendulmassen altså et resultat, der fremkommer tvingende af analysen.

Af ligning (4) fås $\beta = -1/2$, som indsat i ligning (3) giver $\alpha = 1/2$. Ved indsætning af disse værdier for α og β i ligning (1), når vi herefter frem til, at formlen for svingningstiden er:

$$\tau = \text{tal} \times (l/g)^{1/2} \tag{6}$$

En normal matematisk/fysisk udledning fører til en formel magen til. Det ekstra, der opnås ved ikke at skyde genvej ved hjælp af dimensionsanalyse, er, at tallet i ligning (6) kan findes til at være 2π.

(Faktisk afhænger svingningstiden af et pendul ved store udsving, udover af pendulsnorens længde og tyngdefeltstyrken, også af udsvingets størrelse. Så tallet i ligning (6) burde strengt taget rettes til at være en ukendt funktion af den maksimale udslagsvinkel. Vores dimensionsanalyse udledning af ligning (6) er kun rigtig for små penduludsving.)

Lad os dernæst finde omløbstiden for en lavtflyvende satellit. Hvad afhænger den af? Vi kan igen tænke på tyngdefeltstyrken ved Jordens overflade, g, og satellittens masse, m, i stedet for pendulstenens masse. Herudover må, modsvarende pendulsnorens længde, Jordens radius, R, være en bestemmende parameter for satellittens omløbstid. Nået så langt, viser det sig, at dimensionsanalysen til udledning af en formel for satellittens omløbstid er helt magen til udledningen af formlen for pendulets svingningstid. I begge tilfælde ønsker vi at finde en karakteristisk tid som funktion af en karakteristisk længde, massen af det, der bevæger sig, og tyngdefeltstyrken. Dimensionsanalyserne forløber derfor ens i de to tilfælde. Hvad angår satellittens omløbstid, er svaret derfor, at den ikke afhænger af satellittens masse, og er bestemt af ligning (6) med R indsat i stedet for l. Ved en normal matematisk/fysisk udledning findes tallet i formel (6) også i dette tilfælde at være 2π.

De normale matematisk/fysiske udledninger af formlerne for pendulers svingningstider og lavtflyvende satellitters omløbstider er ikke analoge. På sin vis viser udledningerne ved hjælp af dimensionsanalyse derfor en dybere sammenhæng mellem de to fænomener, end det umiddelbart fremgår af de sædvanlige udregninger.

Eksempel 2: Fuglevingebaskning

Hvor hurtigt basker en fugl, der holder sig stille i luften over et sted i landskabet i vindstille vejr? Vores erfaring siger os, at små fugle basker hurtigere med vingerne end store fugle. Men kan vi komme det lidt nærmere og sige noget mere kvantitativt om sammenhængen?

Lad os analysere situationen lidt. Hvis fuglen holder sig svævende og altså hverken taber eller øger sin højde, må fuglens vinger skubbe præcis nok luft nedad pr tid til at balancere tyngdekraften, F_g. Vi kan kalde effekten af fuglens basken med vingerne for en opdriftskraft, F_o, og for at fuglen kan holde sig stille i luften over det samme punkt i landskabet skal disse kræfter altså balancere, $F_g = F_o$.

Tyngdekraften kender vi, $F_g = mg$, hvor m er fuglens masse og g er tyngdefeltsstyrken. Men hvad kan opdriftskraften afhænge af? Den afhænger nok af vingebaskningsfrekvensen, f, altså hvor mange gange i sekundet vingerne bevæges op og ned. Derudover må opdriften også afhænge af luftens densitet, ρ: jo tyndere luft, jo mere skal der skubbes nedad for at balancere tyngdekraften. Desuden må størrelsen af vingerne også betyde noget for, hvor meget luft, der flyttes. Hvis vi antager, at fuglevinger er nogenlunde ensdannede, kan vi beskrive størrelsen af vingerne ved fx. deres længde, altså vingefanget, s. Hvis vi også antager at måden forskellige fugle basker med vingerne er ens, når vi frem til at opdriftskraften må være bestemt af f, ρ og s:

$$F_o = \text{tal} \times f^\alpha \rho^\beta s^\gamma \tag{1}$$

Dimensionen af frekvens er T^{-1}, dimensionen af densitet er masse pr volumen, altså ML^{-3}, og dimensionen af vingefanget er længde, L. Kravet om, at begge sider af ligning (1) har samme dimension (nemlig kraft, $[F] = MLT^{-1}$), betyder at eksponenterne α, β og γ skal matches med eksponenterne på venstresiden, altså

$$M\,L\,T^{-2} = (T^{-1})^\alpha \cdot (ML^{-3})^\beta \cdot (L)^\gamma = T^{-\alpha} M^\beta L^{-3\beta} L^\gamma = M^\beta\, L^{-3\beta+\gamma}\, T^{-\alpha}\,, \tag{2}$$

hvilket leder til en ligning for eksponenterne for hver dimension:

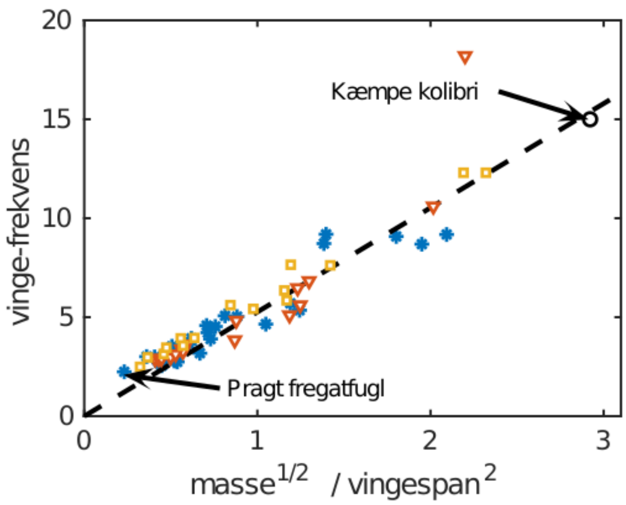
$$\begin{aligned} T: \quad -2 &= -\alpha && (3)\\ M: \quad 1 &= \beta && (4)\\ L: \quad 1 &= -3\beta + \gamma && (5) \end{aligned}$$

Vi har altså $\alpha = 2$ (ligning (3)) og $\beta = 1$ (ligning (4)), som indsat i den sidste ligning (5) giver $\gamma = 4$. Af dimensionsgrunde må der derfor for F_o nødvendigvis gælde

$$F_o = \text{tal} \times f^2 \rho s^4\,. \tag{6}$$

Da opdriftskraften F_o skal balancere tyngdekraften F_g har vi derfor

$$\text{tal} \times f^2 \rho s^4 = mg \tag{7}$$



Figur 0.1 Lineariseret plot af vingefrekvens data.

Her kan vi isolere f og dermed svare på vores oprindelige spørgsmål: hvor hurtigt basker fugle med vingerne? Dimensionsanalysesvaret er således $f^2 = \text{tal} \times \frac{mg}{\rho s^4}$ og dermed fås at

$$f = \text{tal} \times \left(\frac{mg}{\rho s^4}\right)^{1/2} = \text{tal} \times \left(\frac{g}{\rho}\right)^{1/2} \frac{m^{1/2}}{s^2}\,. \tag{8}$$

Da densiteten af luft ρ og tyngdefeltsstyrken g er den samme for forskellige fuglearter er forudsigelsen altså at vingefrekvensen er proportional med kvadratroden af massen over vingespan i anden, $f \propto m^{1/2}/s^2$. Forventningen er at en graf der viser vingefrekvensen f plottet som funktion af $\sqrt{m}/s^2$ giver en ret linie.

Men passer denne formel så? Faktisk findes der data i litteraturen på fugles vingefrekvens, deres masse og vingefang, som vi kan teste vores formel på[1]. Figur 0.1 viser tre datasæt (blå, orange og gul) som følger forudsigelsen af proportionalitet mellem vingefrekvens og $m^{1/2}/s^2$. Vores forudsigelse virker altså rimelig godt! Hældningen af plottet kan bruges til at bestemme den ukendte talfaktor som dimensionsanalysen ikke kan sige noget om.

Data er fra følgende referencer:

C. J. Pennycuick "Predicting wingbeat frequency and wavelength of birds", J. Exp. Biol. **150**, p. 171-185 (1990)
C. J. Pennycuick "Wingbeat frequency of birds in steady cruising flight: new data and improved predictions", J. Exp. Biol. **199**, p. 1613-1618 (1996)
C. J. Pennycuick "Speeds and wingbeat frequencies of migrating birds compared with calculated benchmarks", J. Exp. Biol. **204**, p. 3283-3294 (2001)

[1] Det er dog fugle i flugt og ikke stillestående fugle, men hvis det antages, at deres vingefrekvens ikke er væsentlig forskellig i de to situationer, kan vi teste vores formel på disse data

Eksempel 3: Vandstrømning gennem sand

I hydrogeologi optræder den såkaldte Darcy's lov. Den udtrykker, at strømningshastigheden, v, af en væske gennem et porøst materiale, f.eks. sand, antages proportional med trykfaldet per længdeenhed, $-dP/dx$, hvor proportionalitetskonstanten, k, kaldes for permeabiliteten af den pågældende væske gennem det pågældende materiale. Altså, Darcy's lov:

$$v = -k dP/dx \tag{1}$$

Ifølge lærebogslitteraturen i hydrogeologi er det en måleerfaring, at permeabiliteten er proportional med kvadratet på kornstørrelsen af kornene, som materialet består af. Men det behøver vi imidlertid ikke måle os til. Det kan ikke være anderledes af dimensionsgrunde.

Hvad kan k afhænge af? Permeabiliteten må afhænge af, hvilken væske der er tale om. Det må være sværere at presse mere sejtflydende væsker gennem porerne i materialet end mindre sejtflydende. Vi antager derfor, at k afhænger af η, væskens viskositet, som er et mål for, hvor sejlflydende den er. Vi kunne måske også forestille os, at k afhænger af væskens massefylde, ρ. Herudover må permeabiliteten afhænge af størrelser, former og sammenpakninger i materialet, hvor en given fordeling af kornstørrelser, kornformer og deres sammenpakningsmønstre antages at kunne beskrives ved en middelkornstørrelse, d, og en dimensionsløs funktion, $F(f)$, af en række geometriske forhold f karakteristisk for den pågældende fordeling af størrelser, former og sammenpakninger.

Hvis vi antager, at der ikke er yderligere forhold, der påvirker permeabiliteten, må en formel for den søges blandt:

$$k = \eta^\alpha \, \rho^\beta \, d^\gamma \, F(f)\,, \tag{2}$$

hvor α, β og γ skal vælges således, at højre side af formlen får dimension magen til k og en eventuel ukendt talfaktor er indlemmet i $F(f)$.

Ifølge definitionen af k i ligning 1 ses dens dimension at være:

$$[k] = [v] \cdot [dx]/[dP] = (LT^{-1}) \cdot L/(ML^{-1}T^{-2}) = M^{-1}L^3T\,, \tag{3}$$

idet dimensionen af tryk (og trykændring, dP) er $ML^{-1}T^{-2}$, dimensionen af længde (og længdeændring, dx) er L, og dimensionen af hastighed, v, er LT^{-1}.

Da $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$ og $[d] = L$, skal α, β og γ, for at sikre samme dimension på begge sider af lighedstegnet i ligning (2), derfor opfylde ligningen:

$$M^{-1}L^3T = \left(M\,L^{-1}\,T^{-1}\right)^\alpha \cdot \left(M\,L^{-3}\right)^\beta \cdot L^\gamma) = M^{\alpha+\beta}\,L^{-\alpha-3\beta+\gamma}\,T^{-\alpha}\,. \tag{4}$$

Da basisdimensionerne M, L, og T per definition ikke kan udtrykkes ved hinanden, må potenserne svarende til hver basisdimension være den samme på begge sider af lighedstegnet.

$$\begin{aligned} M: \quad -1 \quad &= \alpha + \beta && (5) \\ L: \quad 3 \quad &= -\alpha - 3\beta + \gamma && (6) \\ T: \quad 1 \quad &= -\alpha && (7) \end{aligned}$$

Ligning (7) giver $\alpha = -1$ direkte. Dette indsat i ligning (5) giver $\beta = 0$. Med disse to resultater kan det ses at ligning (6) kun opfyldes, hvis $\gamma = 2$.

Hvis Darcy's lov kan gøres gældende, er permeabilitetetskonstanten i den derfor af dimensionsgrunde tvingende givet ved et udtryk af formen:

$$k = \eta^{-1}\, d^2\, F(f) \tag{8}$$

Her er den dimensionsløse funktion $F(f)$ ukendt. Men sikkert er det, at k ikke kan afhænge af massefylden af den gennemstrømmende væske, og at den kun kan afhænge kvadratisk af d.

Eksempel 4: Hvor stort er et atom?

Hvis man spørger en fysiker vil svaret være 1 Å, dvs. 10^{-10} m – det er noget enhver fysiker ved. Men kan vi regne det ud? Og i særdeleshed: kan vi regne det ud ved hjælp af dimensionsanalyse? Det (måske) overraskende svar er ja. Og ikke nok med det – det var faktisk sådan selveste Niels Bohr blev inspireret til sin berømte atommodel i kvantemekanikkens tidlige dage.

Lidt historisk baggrund

I starten af forrige århundrede vidste man godt, at et atom består af ladede partikler. I 1911 viste Rutherford, at atomet mest består af tomt rum med en meget lille positivt ladet kerne og negative ladninger kredsende omkring, som planeterne omkring solen. I sin artikel fra 1913 argumenterer Niels Bohr – helt korrekt – for, at den klassiske fysik ikke kan forklare atomets stabilitet: Kredsende ladninger er konstant accelererede og burde derfor ifølge elektrodynamikken udsende elektromagnetisk stråling, tabe kinetisk energi og dermed spiralere ind mod kernen for til sidst at blive opslugt. Intet af dette stemmer med de observationer, man har for atomer. Atomer kan godt nok udsende stråling; dog ikke et kontinuert spektrum som forudsagt af elektrodynamikken, men i diskrete spektrale linjer. Og atomer kollapser ikke. Ved at antage, at energien på atomart niveau er kvantiseret og at elektronerne kun kan befinde sig i bestemte baner omkring kernen, udledte Niels Bohr sin berømte formel for spektrallinjerne af hydrogenatomet. Og han bemærkede, at ved at indføre Plancks konstant h kan man udlede den rigtige størrelse af atomet ved dimensionsanalyse.

Dimensionsanalyse

Hvis vi skal give et estimat af størrelsen af hydrogenatomet baseret på grundlæggende fysiske konstanter, skal vi først identificere de relevante konstanter for problemet. Da vi betragter et system bestående af en elektron, der kredser om den meget tungere proton, vil de oplagte størrelser at inddrage være elementarladningen e, elektronens masse m_e og vakuumpermitiviteten ε_0. Og så altså Plancks konstant, h. Dimensionen af disse størrelser er[1]:

elementarladningen:	$[e] = Q$
elektronens masse:	$[m_e] = M$
permitivitetskonstanten:	$[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$
Plancks konstant:	$[h] = ML^2T^{-1}$

Som et forsøg på at finde et udtryk for størrelsen af brintatomet, Bohr radius a_{Bohr}, ganger vi

[1] Her bruger vi grundstørrelsesarterne: masse M, længde L, tid T og ladning Q. SI-systemet opererer ikke med ladning men med strømstyrke som grundstørrelsesart. I dimensionsanalyse kan man selv vælge hvilke grundstørrelsesarter man vil arbejde med, så længe man er konsekvent.

potenser af e, m_e, ε_0 og h sammen. Kan man finde værdier for α, β, γ og δ således at formlen

$$a_{\text{Bohr}} = e^{\alpha} m_e^{\beta} \varepsilon_0^{\gamma} h^{\delta} \tag{1}$$

respekterer kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet? Kravet fører til følgende ligning for dimensionerne

$$L = Q^{\alpha} M^{\beta} (M^{-1} L^{-3} T^2 Q^2)^{\gamma} (M L^2 T^{-1})^{\delta} = Q^{\alpha+2\gamma}\, M^{\beta-\gamma+\delta}\, T^{2\gamma-\delta}\, L^{-3\gamma+2\delta}\,, \tag{2}$$

og da grundstørrelsesarterne, M, L, T og Q, pr definition ikke kan udtrykkes ved hinanden skal, potenserne på begge sider af lighedstegnet for hver af grundstørrelsesarterne altså være den samme:

$$Q: \qquad 0 = \alpha + 2\gamma \tag{3}$$
$$M: \qquad 0 = \beta - \gamma + \delta \tag{4}$$
$$T: \qquad 0 = 2\gamma - \delta \tag{5}$$
$$L: \qquad 1 = -3\gamma + 2\delta \tag{6}$$

Vi får således fire ligninger med fire ubekendte. Ud fra ligning (5) og (6) findes $\gamma = 1$ og $\delta = 2$, som indsat i ligning (3) og (4) giver $\alpha = -2$ og $\beta = -1$. Vi kan altså godt finde værdier for α, β, γ og δ, der respekterer kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet af ligning (1). Og ikke nok med det: dimensionsanalysen fører til, at enhver teori for brintatomet baseret på konstanterne e, m_e, ε_0 og h af dimensionsgrunde nødvendigvis må føre til resultatet

$$a_{\text{Bohr}} = \text{tal} \times \frac{h^2 \varepsilon_0}{m_e e^2}\,. \tag{7}$$

Under antagelse af, at talfaktoren er af størrelsesorden 1[2] findes ved indsættelse af de numeriske værdier af de indgående konstanter

$$a_{\text{Bohr}} \approx \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js})^2\, 8.854 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}}{9.109 \cdot 10^{-19}\ \text{kg}\, (1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C})^2} = 1.66 \cdot 10^{-10} m = 1.66\ \text{Å} \tag{8}$$

hvilket netop – som Niels Bohr argumenterede – cirka er størrelsen af brintatomet.

Referencer:

N. Bohr “On the constitution of atoms and molecules”, Phil. Mag. **26**, 1-25 (1913)
N. Bohr “Om Brintspektret”, Fysisk Tidsskrift, **12**, (1913)

[2] Som SI systemet er standardiseret optræder der sjældent talfaktorer i fysiske formler, der er en størrelsesorden større eller en størrelsesorden mindre end 1. De mest almindelige talfaktorer skyldes geometri og indeholder π (jævnfør eksempel 1 om pendul og satellit). På grund af ukendskabet til talfaktoren leverer dimensionsanalysen ikke resultatet 1.66 Å. Det er mere rigtigt at sige, at dimensionsanalysen viser, at Bohr radius ligger mellem 10^{-11} og 10^{-9} m, hvilket – når man regner med størrelses ordener – er i pæn overensstemmelse med 10^{-10} m.

Eksempel 5: Hvor lang tid er sandet om at løbe gennem et timeglas på månen?

Det er måske et lidt fjollet spørgsmål at stille, for det bliver næppe et timeglas, man bruger til at måle tiden på månen. Alligevel er det et godt eksempel på, hvordan man ved hjælp af dimensionanalyse ret let kan give et bud på svar, men til gengæld hurtigt ender i noget virkelig indviklet, hvis man skal stille ligninger op for problemet og løse dem.

Hvad afhænger måden sandet løber igennem et timeglas så af? Tyngdefeltsstyrken, g, naturligvis. Og størrelsen af hullet, r, sandet skal løbe igennem.

Men den afhænger også af gnidningskoefficienten mellem sandkorn og glas, μ_g, gnidningskoefficienterne mellem sandkornene indbyrdes, μ_s, størrelsen af sandkorn, sandkornsformerne, fordelingen af sandskornsstørrelser og -former og timeglassets form. Imidlertid kan alle former og fordelinger beskrives dimensionsløst ved vinkler $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ og længdeforhold i forhold til størrelsen af hullet $l_1/r, l_2/r, l_3/r, \ldots$. Da også gnidningskoefficienter er dimensionsløse ender vi op med at antage, at gennemløbstiden, τ, må være givet ved en formel af udseendet

$$\tau = F(\mu_g, \mu_s, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, l_1/r, l_2/r, l_3/r, \ldots)\, r^\alpha g^\beta\,, \tag{1}$$

idet det kun er størrelserne r og g, der bidrager til at give dimensionen tid. I funktionsudtrykket for F indgår kun dimensionsløse størrelser, og F er således selv dimensionsløs. Dimensionerne af r og g er $[r] = L$ og $[g] = LT^{-2}$.

Vi ønsker at finde en tid ud fra disse størrelser, hvilket leder til følgende ligning for dimensionerne

$$T = L^\alpha (LT^{-2})^\beta. \tag{2}$$

For at få dimensionerne til at passe skal der for potenserne α og β gælde

$$T: \qquad -2\beta = 1 \tag{3}$$

$$L: \qquad \alpha + \beta = 0\,. \tag{4}$$

Ligning (3) giver $\beta = -1/2$, hvilket indsat i ligning (4) giver $\alpha = 1/2$.

Tiden τ, det tager sandet at løbe gennem timeglasset, er derfor givet ved

$$\tau = F r^{1/2} g^{-1/2} = F\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{5}$$

Dimensionsanalysen giver et svar – bortset fra, at vi ikke kender den dimensionsløse funktion F. Funktionen F er den samme på jorden og på månen, men hvis vi derudover antager, at alle argumenterne (dvs. gnidningskoefficienter, vinkler, fordelinger, osv.) også er de samme, vil funktions*værdien* være den samme på jorden og månen og derfor kan svaret alt andet lige end g skrives i termer af den tid, det tager på jorden (som jo netop er en time):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\text{måne}}}{\tau_{\text{jord}}} &= \frac{F\sqrt{\frac{r}{g_{\text{måne}}}}}{F\sqrt{\frac{r}{g_{\text{jord}}}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{jord}}}{g_{\text{måne}}}}\,, \text{ dvs.} \\ \tau_{\text{måne}} &= \sqrt{\frac{g_{\text{jord}}}{g_{\text{måne}}}}\tau_{\text{jord}} \end{aligned} \tag{6}$$

Ved indsættelse af $g_{\text{måne}} = 1.62$ m/s^2 og $g_{\text{jord}} = 9.82$ m/s^2 får vi, at det ville tage ca. 2 1/2 time for sandet at løbe igennem timeglasset på månen.

Så vidt dimensionsanalysens svar på spørgsmålet.

På Roskilde Universitet førte spørgsmålet – og dimensionssvaret – til et semesterprojekt. Studentergruppen satte sig for at undersøge problemet, dels med computersimuleringer, dels eksperimentelt. Metoden, de brugte til at variere tyngdefeltsstyrken, er den samme, som man bruger til at træne astronauter: de lavede en centrifuge til timeglasset og overvågede, hvordan sandet løb gennem timeglasset ved forskellige omdrejningshastigheder. Deres undersøgelser viste, at proportionaliteten $t \propto g^{-1/2}$ ikke holdt i deres forsøg. De fandt i stedet, at en anden potens gav en god beskrivelse af deres resultater, nemlig $t \propto g^{-3/4}$. Hvordan kan det nu være? Djævelen ligger i antagelsen *alt andet lige*. Projektet viste, at den antagelse ikke var rigtig, altså at funktionen f ikke har samme værdi ved forskellig g. Da sand ikke er en væske, der bare flyder, men består af større partikler af forskellige former, betyder pakningen (altså hvordan partiklerne ligger i forhold til hinanden) noget. Og pakningen afhænger tilsyneladende af tyngdefeltet. Pakning og flow af granulære materialer (som sand) er et forskningsområde i sig selv, og derfor er spørgsmålet om timeglasset på månen slet ikke så fjollet, som det umiddelbart lyder.

Videre læsning:

Filip Samuelsen, Helena Veldt, Peter Johannsen "The flow rate of granular material in an hourglass under various gravitational acceleration", NatBach 2. semester rapport, RUC
P. G. Hofmeister, J. Blum, and D. Heisselmann "The Flow Of Granular Matter Under Reduced-Gravity Conditions", **1145**, 71 (2009)