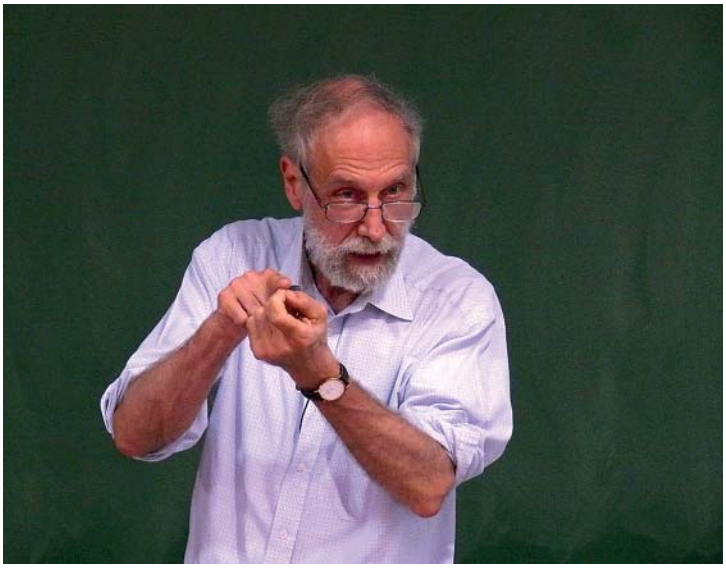
GEOMETRI

– når faktorernes orden har betydning

En af geometriens nyeste sidegrene handler populært sagt om at forstå, hvad der sker, når rækkefølgen af begivenheder ikke er ligegyldig. Denne form for geometri – kaldet ikke-kommutativ geometri – kan siges at repræsentere en fascinerende deformeret virkelighed, der eksisterer side om side med den verden, vi kender.

Moderne geometri er en matematisk disciplin i rivende udvikling og i tæt samspil med andre videnskaber. Man kan sammenligne udviklingen med et vildt og hurtigt voksende træ, der bredder sig ukontrolleret i alle retninger via nye skud og overraskende forbindelser. I denne tekst vil jeg introducere et enkelt af de nyeste og rigeste topskud på geometriens træ, som jeg selv er dybt fascineret af. Denne gren kaldes for *ikke-kommutativ geometri* og er vokset frem af de inspirerende tanker, som den indflydelsesrige franske matematiker Alain Connes gjorde sig i slutningen af det 20. århundrede.



Den alsidige franske matematiker Alain Connes har stået fadder til feltet ikke-kommutativ geometri. Foto: Peter Potrowl/CC BY-SA 3.0

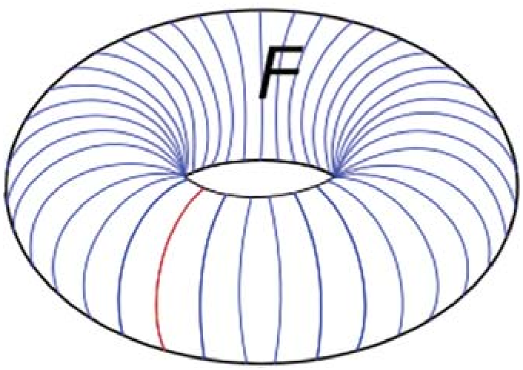
Ordet "ikke-kommutativ" betyder, at det ikke er ligegyldigt i hvilken rækkefølge, man udfører to handlinger. For at tage et dagligdags eksempel, så er det helt sikkert ikke ligegyldigt, om man først tager tøj på og dernæst går ud på gaden, eller om man først går ud på gaden og dernæst tager tøj på. Rækkefølgen af disse to handlinger kan lede til vidt forskellige resultater. Rent matematisk kan ikke-kommutativitet beskrives med følgende udtryk:

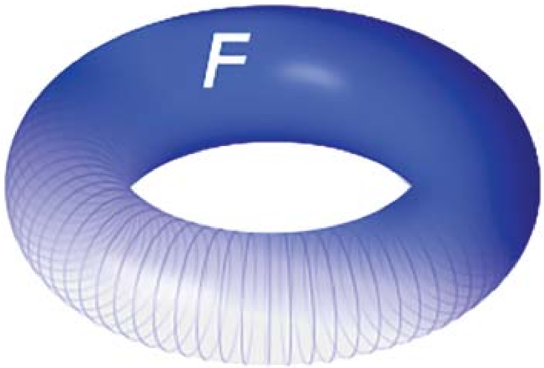
$$X \cdot Y \neq Y \cdot X$$

Det vil sige, at rækkefølgen af symbolerne X og Y har en betydning, når man ganger dem sammen. Vi siger også, at X og Y ikke kommuterer. Det er nærmest umuligt at overvurdere, hvor vigtig en rolle idéen om ikke-kommutativitet har for moderne videnskab. For eksempel kunne X og Y være observerbare fænomener i kvantemekanisk forstand, hvor det viser sig at være afgørende, at disse fænomener ikke kommuterer. Man kan nærmest sige, at ikke-kommutativitet udgør forskellen på klassisk mekanik og kvantemekanik.

Men hvad har ikke-kommutativitet at gøre med geometri? En del af svaret er, at ikke-kommutativ geometri er en udvidet form for geometri, der også gælder i situationer, hvor vores sædvanlige intuition om geometri er sat ud af kraft. Det vil sige situationer, hvor man ikke uden videre kan benytte sig af den geometriske forståelse, som vi alle har udviklet ved at bevæge os rundt i den verden, vi kender. For at give et eksempel kan ikke-kommutativ geometri handle om de geometriske love, der gælder inde i et atom, og ikke-kommutativ geometri har derfor tætte forbindelser til partikelfysik. Men der er også en solid mængde matematisk

Om Forfatteren
Jens Kaad er lektor ved Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet, hvor han forsker i ikke-kommutativ geometri og mere specifikt med ubegrænset KK-teori, som er en slags maskine, der genererer nye geometriske strukturer ud fra bestemte dybtliggende principper.
kaad@imada.sdu.dk





Snor man en tynd tråd rundt om en badering med en fast vinkel, beskriver tråden matematisk set en såkaldt foliering af baderingen. Er vinklen et rationalt tal, vil snoren vende tilbage til sit udgangspunkt efter et endeligt antal snoninger rundt om baderingen (lineær foliering). Er vinklen derimod et irrationalt tal, vil snoren aldrig nå tilbage til sit udgangspunkt (Kronecker-foliering). Illustration efter: User Lantonov/Wikemedia Commons/CC BY-SA 4.0

motivation for at beskæftige sig med en udvidet form for geometri.

På opdagelse på baderingen

Et af de mest berømte eksempler på en geometrisk situation, der kan beskrives med en ikke-kommutativ tilgang, kan forklares ved at kigge på en badering. Man forestiller sig nu, at man tager en syletynd tråd og vikler den rundt om sin badering, idet man hele tiden fastholder en bestemt vinkel. Dette kan være besværligt at gøre i praksis, men vi foretager her et tankeeksperiment. Den fastholdte vinkel betegnes normalt med det græske bogstav θ (theta).

Der kan nu forekomme to vidt forskellige situationer, alt efter om vinklen θ er en brøk eller ej. Det vil sige, alt efter om vinklen θ er et rationalt eller et irrationalt tal. Gode eksempler på rationale tal (brøker) er tallene 1/3, 1/2, 4/5 osv., mens gode eksempler på irrationale tal er tallene $\sqrt{2}$, π, log(2).

I situationen, hvor vinklen θ er rational, sker der det, at den syletynde tråd vender tilbage til sit begyndelsespunkt, når vi har viklet den rundt om baderingen et endeligt antal gange (hvis θ for eksempel er 4/5, skal vi blot fem gange rundt, før dette sker). I situationen, hvor vinklen θ er irrational, vender den syletynde tråd *aldrig* tilbage til sit begyndelsespunkt, og vi kan derfor blive ved i al uendelighed med at vikle den rundt om baderingen. Det bliver således nødvendigt at bruge en uendelig lang tråd, og efter et stykke tid vil det ligne, at hele baderingen er dækket med tråd. I begge tilfælde har vi beskrevet en såkaldt foliering af vores badering.

På fransk hedder foliering "feuilletage" og kan referere til en særlig slags dej, der består af mange meget tynde lag af dej og som for eksempel kan bruges i bagværk. De enkelte lag i dejen kaldes da for folieringens blade ("feuillets"). Man kan også tænke på en foliering, som om det var en bog, hvor de enkelte sider i bogen udgør folieringens blade. I vores eksempel med baderingen beskriver den syletynde tråd folieringens blade.

Den ikke-kommutative badering

Lad os kigge nærmere på situationen, hvor vinklen θ er et irrationalt tal. Det vil sige den situation, hvor vi har brug for en uendelig lang og syletynd tråd for at beskrive folieringen af baderingen. Denne foliering af baderingen kaldes for Kronecker-folieringen og er opkaldt efter den jødiske matematiker Leopold Kronecker. I grove træk handler denne folierings geometri om at forstå, hvad der sker, hvis man har to variable X og Y, som ikke kommuterer, men som i stedet opfylder ligningen:

$$X \cdot Y = \theta \cdot Y \cdot X \qquad (*)$$

Det vil sige, at de to variable X og Y kommuterer op til vores vinkel θ, så hver gang X og Y bytter plads, dukker vores vinkel θ op som et slags korrektionsled. Denne specielle måde at regne på tillader os at forstå Kronecker-folieringens geometri, og når vi anvender dette synspunkt, taler vi om en *ikke-kommutativ badering*.

Hvis man bevæger sig rundt på en ikke-kommutativ badering, oplever man et bemærkelsesværdigt fænomen, som jeg vil forklare lidt nærmere. Lad os tænke på baderingen, som om den var et kvadrat, hvor kanterne er blevet limet sammen parvist (sådan som de fleste baderinge nok er fremstillet). Vores sædvanlige geometriske intuition fortæller os, at vi kommer det samme sted hen, hvis vi starter et sted på kvadratet og

- først går et skridt mod øst og dernæst et skridt mod nord, eller
- først går et skridt mod nord og dernæst et skridt mod øst.

Udtrykket foliering kender vi for eksempel også fra folieret bagværk, som er kager eller brød, hvor dejen foldes og rulles ud mange gange, så den kommer til at bestå af mange tynde lag (blandt andet er croissanter lavet på denne måde).
Foto: Shutterstock

I den verden, vi kender, er det ligegyldigt, hvilken rækkefølge vi tager disse to skridt i – vi ender det samme sted under alle omstændigheder.

Nu taler vi imidlertid om en ikke-kommutativ badering, som på en subtil måde er blevet deformeret af vores irrationale vinkel θ. Her er det ikke ligegyldigt, om vi først går mod øst og dernæst mod nord, eller om vi gør det i den omvendte rækkefølge. Den ligning, vi har beskrevet i (*) fortæller os, at vi ikke ender det samme sted, fordi vi uvægerligt bliver skubbet ud af kurs af den irrationale vinkel θ!

En deformeret virkelighed

Hvordan denne type af geometrisk opførsel kan beskrives og forstås rent matematisk har beskæftiget en lang række af matematikere og gør det stadigvæk den dag i dag. I virkeligheden viser det sig, at den ikke-kommutative badering og andre lignende objekter slet ikke eksisterer som rumlige størrelser i sædvanlig forstand, men i stedet udelukkende giver mening i en abstrakt algebraisk forstand.

Dermed indskriver ikke-kommutativ geometri sig blandt de matematiske teorier, der beskæftiger sig med følgende korrespondance:

Det geometriske objekt i sig selv
↕
Observationer fra
det geometriske objekt

Den øverste del af korrespondancen skal her forstås som en rumlig størrelse (for eksempel jordkloden), og den nederste skal forstås som målinger foretaget overalt på denne rumlige størrelse (for eksempel temperaturmålinger). Den øverste del vil da opføre sig som et geometrisk objekt, der kan beskrives med klassiske geometriske metoder (afstande, vinkler, volumen, retning, krumning osv.), mens den nederste del bedst kan forstås ved hjælp af algebraiske metoder (multiplikation og addition) i samspil med raffinerede konvergensbegreber (hvad det vil sige, at noget nærmer sig noget andet). Ikke-kommutativ geometri beskæftiger sig med deformationer af den nederste del, som stadigvæk giver mening i algebraens og konvergensens verden, men hvor den øverste del ikke længere eksisterer. Dog har den nye deformerede nederste del som regel en lang række karakteristika, der forbinder den med det oprindelige geometriske objekt, som vi kender det. På den måde giver det mening at tænke på ikke-kommutativ geometri som en udvidelse af den sædvanlige geometri til en ny og fascinerende deformeret virkelighed, der eksisterer side om side med den verden, vi kender. Man kan måske endda sige, at den deformerede geometri eksisterer som en integreret, men usynlig, del af den virkelighed, vi alle befinder os i. ■